مجلة 5min Maths

CHABANE Oussama

2AS

الفصل الأول

من تقديم الأستاذ

شعبان أسامة

للشعب:

- علوم تجريبية
- رياضيات
- تقني رياضي

تشمل المحاور التالية:

- الدوال
- الاشتقاقية
- المرجح
- معادلات °3
- الاحتمالات

اصدار أكتوبر 2020- تلمسان

instagram/ Facebook/ Telegram/ Google: 5min Maths

dzprimaire.com

بسم الله الرحمن الرحيم

اليك أيها التلميذ " مجلة 5min Maths" للسنة الثانية ثانوي الشعب العلمية (الفصل الأول)

محور الدوال وفق المنهاج الرسمي الجديد

جاء هذا الملف شامل قصد مساعدتك على التحضير الجيد للسنة الثانية و لاجتياز بكالوريا دورة 2022، أرجو عدم قراءة حلول التمارين المطروحة بل التفكير في الحل الذاتي أولا ثم مقارنته مع الحل المقترح مع العلم أنه ليس الحل الوحيد و ربما يكون حلك أحسن و أقصر لكن النتائج و الأهداف واحدة ,

في الأخير نرجوا من الله القدير أن يوفقك الى ما فيه نجاحك و يهديك الى سبيل الخير

أهدي هذا العمل المتواضع لعائلتي الكريمة أولا

و ثانيا لجميع تلامذتي خاصة تلاميذ ثانوية بوحميدي الطاهر...أحبكم

الأستاذ شعبان أسامة

dzprimaire.com

مجلة الرياضيات للطور الثانوي بمختلف مستوياته الثلاثة، تم اصدار أول نسخة بتاريخ :2019/09/13

5min Maths

CHABANE Oussama

تجدون في هذا العمل

1. الدوال

- ملخص الدرس+ تطبيقات
- تمارين محلولة
- تقويم المحور

"سيتم نشر المحاور الأخرى الخاصة بالفصل الأول تدريجيا حسب التوزيع السنوي

dzprimaire.com

محور

الدوال

dzprimaire.com

ملخص الدرس

1.

تذكير حول الدوال

الدالة و مجموعة التعريف:

تعريف: D جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

إذا كانت D هي مجموعة تعريف الدالة f فإن f ترفق بكل عدد حقيقي x من D، عددا حقيقيا وحيدا نرمز له بالرمز $f(x)$.

نقول أن $f(x)$ هي صورة x بالدالة f.

مجموعة تعريف دالة f هي مجموعة الأعداد الحقيقية x التي يكون من أجلها حساب $f(x)$ ممكنا

التمثيل البياني لدالة :

تعريف: f دالة و D مجموعة تعريفها.

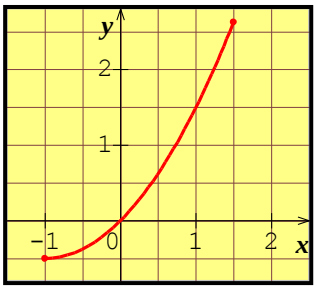
التمثيل البياني (أو المنحنى الممثل) للدالة f في معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ للمستوي، هو مجموعة النقط $M(x,y)$ حيث: $x\in D$ و $y=f(x)$

إذا رمزنا إلى منحنى الدالة f بالرمز (C) فإن $y=f(x)$ هي معادلة (C) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

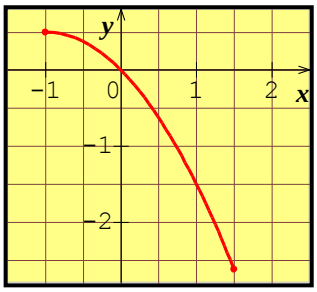
اتجاه تغير دالة على مجال:

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$.

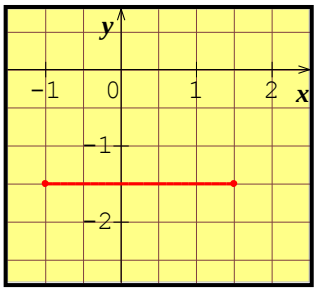
f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1<x_2$ فإن: $f(x_1)<f(x_2)$	f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، إذا كان $x_1<x_2$ فإن: $f(x_1)>f(x_2)$	f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I، $f(x_1)=f(x_2)$



f متزايدة تماما على $[-1;1.5]$



f متناقصة تماما على $[-1;1.5]$



f ثابتة على $[-1;1.5]$

dzprimaire.com

ملاحظة: إذا كانت الدالة f إما متزايدة و إما متناقصة على مجال I نقول أنها رتيبة على هذا المجال.

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+6x+2$.

1.أوجد صور الأعداد 1، -2 و $\sqrt{3}$ بالدالة f .

2.أحسب سوابق العددين 2 و -7 بالدالة f .

3.بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x)=(x+a)^2-7$ حيث a عدد حقيقي يطلب تعيينه. هل يقبل العدد (-8) سوابق بالدالة f ؟

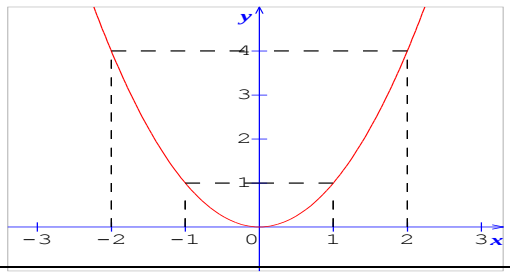
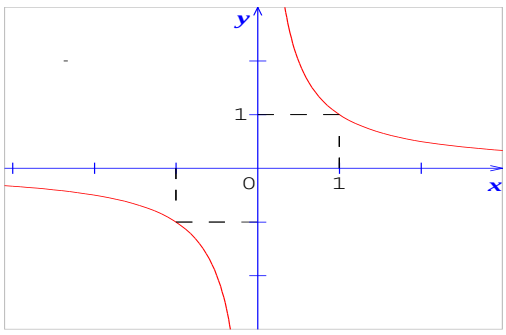
طريقة: لتعيين صورة عدد حقيقي α بدالة f معرفة بدستور نقوم بحساب $f(\alpha)$ أما لتعيين السوابق الممكنة لعدد حقيقي β نقوم بحل المعادلة ذات المجهول x: $f(x)=\beta$.

حل:

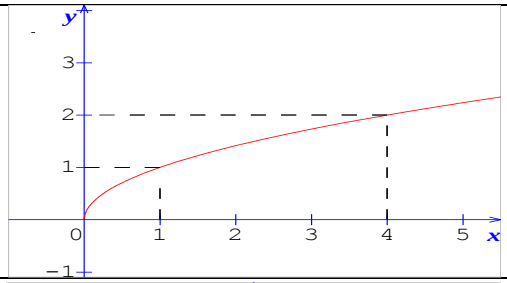
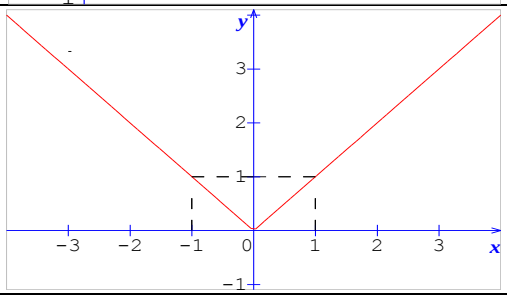
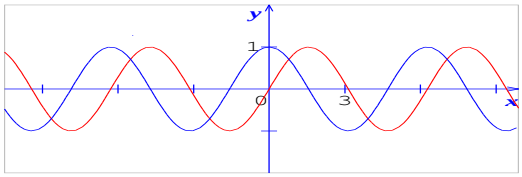
1. $f(1)=9$ ، $f(-2)=-6$ و $f(\sqrt{3})=5+6\sqrt{3}$.
2. $f(x)=2$ يعني $x^2+6x=0$ أي $x(x+6)=0$ أي $x=0$ أو $x=-6$ إذن للعدد 2 سابقتان هما 0 و -6.
$f(x)=-7$ يعني $x^2+6x+9=0$ أي $(x+3)^2=0$ أي $x=-3$ إذن للعدد -7 سابقة وحيدة هي -3.
3. لدينا: $f(x)=(x^2+6x)+2$ ومنه $f(x)=(x+3)^2-9+2$ إذن $f(x)=(x+3)^2-7$. إذن $a=3$.
$f(x)=-8$ يعني $(x+3)^2-7=-8$ أي $(x+3)^2=-1$. المعادلة لا تقبل حلولا و منه ليس للعدد -8 سوابق.

الدوال المرجعي

نلخص في الجدول الموالي تذكيرا ببعض الدوال المرجعية التي درست في السنة الأولى ثانوي

الدالة	اتجاه التغير	التمثيل البياني
$f: x \mapsto x^2$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ إذا كان $a<b\leq 0$ فإن $a^2>b^2$ • f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0\leq a<b$ فإن $a^2<b^2$	
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0[$ إذا كان $a<b<0$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ • f متناقصة تماما على $]0,+\infty[$ إذا كان $0<a<b$ فإن $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$	

dzprimaire.com

$f : x \mapsto \sqrt{x}$	• f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0 \le a < b$ فإن $\sqrt{a} < \sqrt{b}$	
$f : x \mapsto \lvert x \rvert$	• f متناقصة تماما على $]-\infty,0]$ إذا كان $a < b \le 0$ فإن $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$ • f متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ إذا كان $0 \le a < b$ فإن $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$	
$f : x \mapsto \sin x$ $g : x \mapsto \cos x$	الدالتان $f : x \mapsto \sin x$ و $g : x \mapsto \cos x$ دوريتان دورهما 2π	

تطبيق

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = -x^2 - 4x + 1$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = -(x+2)^2 + 5$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[-2;+\infty[$ و $]-\infty;-2]$

حل:

1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بالنشر: من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$-(x+2)^2 + 5 = -(x^2 + 4x + 4) + 5 = -x^2 - 4x - 4 + 5 = -x^2 - 4x + 1 = f(x)$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $[-2;+\infty[$

ليكن a و b عددين حقيقيين حيث: $-2 \le a < b$ و منه $0 \le a+2 < b+2$ (بإضافة العدد 2)

و بما أن الدالة " **مربع** " متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ فإن $(a+2)^2 < (b+2)^2$ ومنه $-(a+2)^2 > -(b+2)^2$

إذن $-(a+2)^2 + 5 > -(b+2)^2 + 5$. نجد هكذا إذن $f(a) > f(b)$.

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $]-\infty;-2]$.

dzprimaire.com

تطبيق

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{3x-5}{x-2}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $]2;+\infty[$ و $]-\infty;2[$.

حل: 1. ننطلق من الشكل المعطى ثم نقوم بتوحيد المقامات: من أجل كل x من $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ لدينا:

$$\frac{1}{x-2}+3=\frac{1+3(x-2)}{x-2}=\frac{1+3x-6}{x-2}=\frac{3x-5}{x-2}=f(x).$$

2. لنعين اتجاه تغير الدالة f على المجال $]2;+\infty[$

ليكن a و b عددين من المجال $]2;+\infty[$ حيث: $2<a<b$ و منه $0<a-2<b-2$ (بطرح العدد 2)

و بما أن الدالة " **مقلوب** " متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ فإن $\dfrac{1}{a-2}>\dfrac{1}{b-2}$ ومنه $\dfrac{1}{a-2}+3>\dfrac{1}{b-2}+3$.

نجد إذن $f(a)>f(b)$

نستنتج أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]2;+\infty[$.

بنفس الكيفية نثبت أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;2[$.

عمليات على الدوال

تساوي دالتين

تعريف: القول عن دالتين f و g أنهما متساويتان يعني أن لهما نفس مجموعة التعريف D و أن من أجل كل عدد حقيقي x من D لدينا: $f(x)=g(x)$ و نكتب: $f=g$

العمليات الجبرية

f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. λ و k عددان حقيقيان.

العملية	الرمز	التعريف	مجموعة التعريف
مجموع f و k	$f+k$	$(f+k)(x)=f(x)+k$	D_f
مجموع f و g	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
جداء f بالعدد λ	λf	$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$	D_f
جداء f و g	$f\times g$	$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$	$D_f\cap D_g$
حاصل قسمة f على g	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$\{x\in D_f\cap D_g : g(x)\neq 0\}$

مثال: f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+2$

dzprimaire.com

- الدوال $f+3$ ، $f+g$ ، $-2f$ ، $f\times g$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$(f+3)(x)=x^2+3$ ، $(f+g)(x)=x^2+x+2$ ، $(-2f)(x)=-2x^2$ ، $(f\times g)(x)=x^2(x+2)$

- الدالة $\frac{f}{g}$ هي الدالة المعرفة على $]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[$ بـ: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2}{x+2}$.

تطبيق:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+2$ و $g(x)=x^2+2x$

1. عرف الدوال $f+g$ ، $-f+2g$ ، $f\times g$ و $\frac{f}{g}$
2. نعتبر الدالة h المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$. هل الدالتان f و h متساويتان ؟

حل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x: $(f+g)(x)=x^2+3x+2$ ، $(-f+2g)(x)=2x^2+3x-2$ و $(f\times g)(x)=x^3+4x^2+4x$

من أجل $x\neq 0$ و $x\neq -2$: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x+2}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$ ($x^2+2x=0$ من أجل $x=0$ أو $x=-2$)

2. الدالتان f و h متمايزتان لأن ليس لهما نفس مجموعة التعريف.

تركيب الدوال

تعريف: f و g دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب.

مركب الدالة f متبوعة بالدالة g هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز $g\circ f$ و المعرفة على: $D_{g\circ f}=\{x\,/\,f(x)\in D_g \text{ و } x\in D_f\}$

بـ: $(g\circ f)(x)=g[f(x)]$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-x+3$ و لتكن g الدالة الجذر التربيعي $(x\mapsto\sqrt{x})$

يكون $-x+3\geq 0$ من أجل $x\leq 3$ ومنه مجموعة تعريف الدالة $g\circ f$ هي: $D=]-\infty,3]$ و لدينا:

$$(g\circ f)(x)=\sqrt{-x+3}$$

تطبيق

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[0;+\infty[$ و $[1;+\infty[$ على الترتيب بـ: $f(x)=2x^2+1$ و $g(x)=\sqrt{x-1}$

1. أكتب كلا من f و g على شكل مركب دالتين مرجعيتين يطلب تحديدهما.
2. عرف الدالتين $f\circ g$ و $g\circ f$

dzprimaire.com

حل:

1. لدينا: $x \xrightarrow{u_1} x^2 \xrightarrow{v_1} 2x^2+1$ ، f

$x \xrightarrow{u_2} x-1 \xrightarrow{v_2} \sqrt{x-1}$ ، g

ومنه $f = v_1 \circ u_1$ حيث: $u_1 : x \to x^2$ و $v_1 : x \to 2x+1$

و $g = v_2 \circ u_2$ حيث: $u_2 : x \to x-1$ و $v_2 : x \to \sqrt{x}$

نلاحظ فعلا أن الدوال u_1 ، v_1 ، u_2 و v_2 دوال مرجعية.

2. تعريف الدالتين $f \circ g$ و $g \circ f$

لدينا من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $g(x) \geq 0$ أي $g(x) \in [0;+\infty[$ ومنه الدالة $f \circ g$ معرفة على $[1;+\infty[$

و لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$: $f(x) \geq 1$ أي $f(x) \in [1;+\infty[$ ومنه الدالة $g \circ f$ معرفة على $[0;+\infty[$

من أجل كل x من $[1;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} f \circ g(x) &= f\left[(g(x))\right] \\ &= f\left(\sqrt{x-1}\right) \\ &= 2\left(\sqrt{x-1}\right)^2+1 \\ &= 2(x-1)+1 \\ &= 2x-1 \end{aligned}$$

من أجل كل x من $[0;+\infty[$ لدينا:

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g[f(x)] \\ &= g\left(2x^2+1\right) \\ &= \sqrt{\left(2x^2+1\right)-1} \\ &= \sqrt{2x^2} \\ &= \sqrt{2}\,x \end{aligned}$$

اتجاه التغير

اتجاه تغير الدالة: $f+k$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و k عدد حقيقي. للدالتين f و $f+k$ نفس اتجاه التغير على المجال I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.

إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I فإن $f(a)<f(b)$. بإضافة k إلى طرفي المتباينة نحصل على: $f(a)+k<f(b)+k$ أي: $(f+k)(a)<(f+k)(b)$. إذن الدالة $f+k$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا إذا كانت f متناقصة تماما على المجال I.

اتجاه تغير الدالة: λf

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و λ عدد حقيقي غير معدوم.

- إذا كان $\lambda>0$ يكون للدالتين f و λf نفس اتجاه التغير على المجال I.
- إذا كان $\lambda<0$ يكون اتجاها تغير الدالتين f و λf متعاكسين على المجال I.

dzprimaire.com

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.

إذا كانت f متزايدة تماما على المجال I وكان $\lambda>0$ فإن: $f(a)<f(b)$ و $\lambda f(a)<\lambda f(b)$ أي أن:

$(\lambda f)(a)<(\lambda f)(b)$ إذن الدالة λf متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

تطبيق

أدرس اتجاه تغير كل من الدالتين الآتيتين:

1. f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $f(x)=-\frac{3}{x}+2$
2. g هي الدالة المعرفة على $[1.5;+\infty[$ بـ: $g(x)=(-2x+3)^2$

طريقة: عند دراسة اتجاه تغير دالة f يمكن أن نحاول كتابة f على الشكل $u+k$ ، λu أو $v\circ u$ حيث: u و v دالتان مرجعيتان.

حل:

1. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=-3h+2$.

للدالتين f و $-3h$ نفس اتجاه التغير ومنه فاتجاها تغير الدالتين f و h متعاكسين.

بما أن h متناقصة تماما على $]-\infty;0[$ فإن f متزايدة تماما على $]-\infty;0[$.

2. إذا اعتبرنا الدالتين u و v المعرفتين على $[1.5;+\infty[$ و $]-\infty;0]$ على الترتيب بـ:

$u(x)=-2x+3$ و $v(x)=x^2$ و علما أنه من أجل كل x من $[1.5;+\infty[$، $u(x)\le 0$ يكون لدينا: $g=v\circ u$.

بما أن الدالة u متناقصة تماما على $[1.5;+\infty[$ و الدالة v متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ فإن الدالة g متزايدة تماما على المجال $[1.5;+\infty[$.

اتجاه تغير الدالة: $g\circ f$

مبرهنة: f دالة رتيبة تماما على مجال I و g دالة رتيبة تماما على مجال J حيث: $f(I)\subset J$

- إذا كان للدالتين f و g نفس اتجاه التغير تكون الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على I.
- إذا كان اتجاها تغير الدالتين f و g متعاكسين تكون الدالة $g\circ f$ متناقصة تماما على I.

برهان: ليكن a و b عددين من المجال I حيث: $a<b$.

إذا كانت f متزايدة تماما على I وكانت g متزايدة تماما على J فإن: $f(a)<f(b)$ و $g[f(a)]<g[f(b)]$

$(f(a)$ و $f(b)$ عنصران من $J)$ ومنه $(g\circ f)(a)<(g\circ f)(b)$. إذن الدالة $g\circ f$ متزايدة تماما على المجال I.

ملاحظة: نتبع برهانا مماثلا في الحالات الثلاثة الأخرى.

dzprimaire.com

تطبيق:

f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$.

1. أدرس اتجاه تغير الدالة $(f+g)$ في الحالتين التاليتين:

ا) $f(x)=3x+1$ و $g(x)=-2x+3$ ب) $f(x)=2x+1$ و $g(x)=-3x+5$

2. أدرس اتجاه تغير الدالة $(f\times g)$ علما أن: $f(x)=x-\sqrt{2}$ و $g(x)=x+\sqrt{2}$

حل:

1. ا) لدينا: $(f+g)(x)=-2x+3+3x+1=x+4$ ومنه الدالة $(f+g)$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ب) لدينا: $(f+g)(x)=2x+1-3x+5=-x+6$ ومنه الدالة $(f+g)$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. لدينا: $(f\times g)(x)=\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=x^2-2$. للدالتين $(f\times g)$ و الدالة " مربع " نفس اتجاه التغير و منه فالدالة $(f\times g)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0]$ و متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

تعليق: لا يمكن إعطاء قواعد عامة تمكن من استنتاج اتجاه تغير الدالتين $(f+g)$ و $(f\times g)$ في كل الحالات

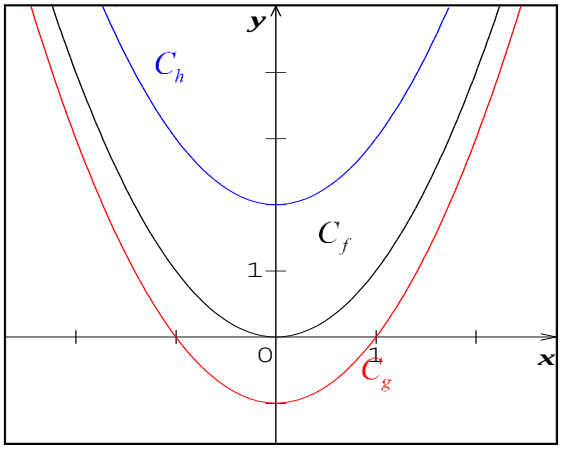
إلا أن ذلك يكون ممكنا إذا أضيفت شروط على الدالتين f و g.

التمثيل البياني

التمثيل البياني للدالة: $f+k$

مبرهنة: إذا كان (C_f) و (C_{f+k}) التمثيلين البيانيين في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ للدالتين f و $(f+k)$ على الترتيب حيث k عدد حقيقي فإن (C_{f+k}) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.

برهان: نعتبر النقطتين $M(x,f(x))$ من (C_f) و $M'(x,(f+k)(x))$ من (C_{f+k}). بما أن: $(f+k)(x)=f(x)+k$ فإن الشعاع $\overrightarrow{MM'}$ مركباته $(0,k)$ و $\overrightarrow{MM'}=k\vec{j}$. إذن M' هي صورة M بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$. و منه المنحني (C_{f+k}) هو صورة المنحني (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $k\vec{j}$.



مثال: نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=x^2-1$ و $h(x)=x^2+2$

لدينا $g=f-1$ ومنه (C_g) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $-\vec{j}$.

لدينا $h=f+2$ ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بالانسحاب الذي شعاعه $2\vec{j}$.

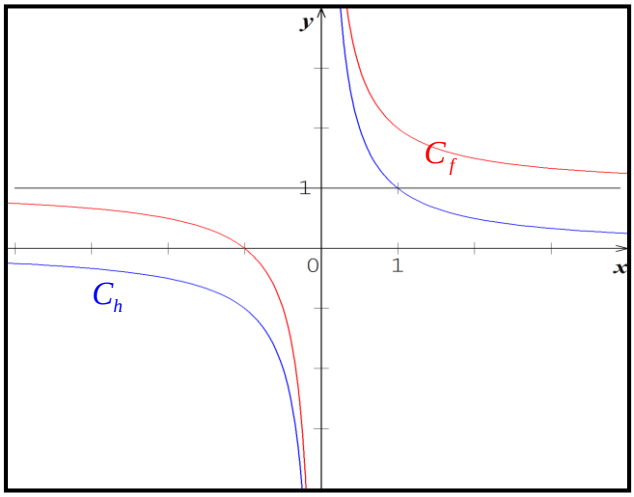
dzprimaire.com

تطبيق:

لتكن f الدالة المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\frac{x+1}{x}$

1. تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x لدينا: $f(x)=\frac{1}{x}+1$
2. أرسم في معلم ، التمثيل البياني للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة " مقلوب ".

حل:



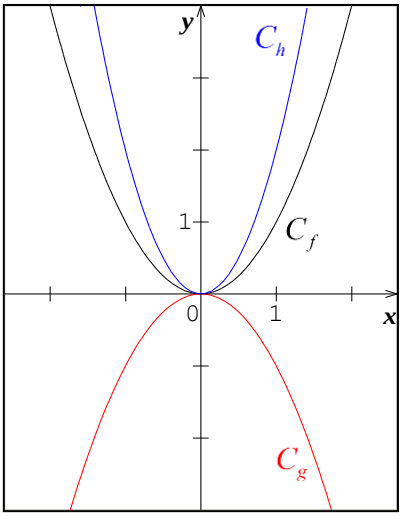
1. من أجل $x\neq 0$ لدينا: $f(x)=\frac{x}{x}+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$
2. إذا اعتبرنا الدالة h المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=\frac{1}{x}$ يكون لدينا: $f=h+1$

إذن، في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$، المنحني الممثل للدالة f هو صورة القطع الزائد الممثل للدالة h بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$

التمثيل البياني للدالة: λf

مبرهنة: ليكن $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{\lambda f}\right)$ التمثيلين البيانيين في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ للدالتين f و (λf) على الترتيب حيث λ عدد حقيقي غير معدوم. و لتكن M نقطة من $\left(C_f\right)$ فاصلتها x.

نحصل على نقطة من $\left(C_{\lambda f}\right)$ ذات الفاصلة x بضرب ترتيب النقطة M في العدد λ.



برهان: إذا كانت $M(x,f(x))$ نقطة من $\left(C_f\right)$ فإن $M'(x,\lambda f(x))$ نقطة من $\left(C_{\lambda f}\right)$ لأن $(\lambda f)(x)=\lambda.f(x)$.

مثال: نعتبر الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ كالآتي:

$f(x)=x^2$ ، $g(x)=-x^2$ و $h(x)=2x^2$

و لتكن $\left(C_f\right)$، $\left(C_g\right)$ و $\left(C_h\right)$ تمثيلاتها البيانية في معلم $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

لدينا $g=-f$ و $h=2f$

ملاحظة: إذا كان $\lambda=-1$ يكون المنحنيان $\left(C_f\right)$ و $\left(C_{-f}\right)$، المرسومان في معلم متعامد، متناظرين بالنسبة لمحور الفواصل.

dzprimaire.com

تطبيق:

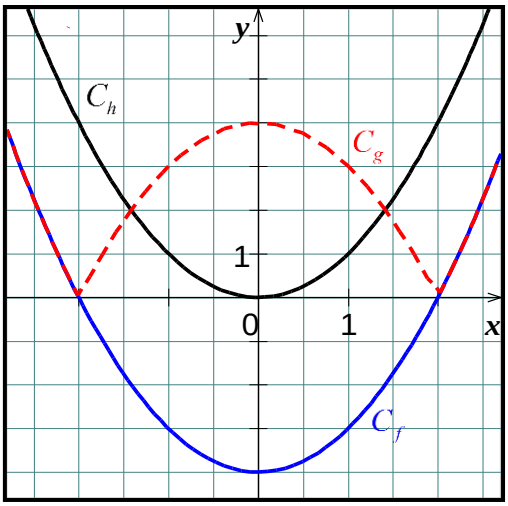
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-4$ و $g(x)=|f(x)|$. نسمي (C_f) و (C_g)

تمثيلاهما البيانيان على الترتيب في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. ارسم المنحني (C_f) انطلاقا من (C_h) التمثيل البياني للدالة $h:x\mapsto x^2$ (h هي الدالة " مربع

2. بين كيف يمكن استنتاج (C_g) انطلاقا من (C_f) ثم ارسمه.

حل:



1. (C_f) هو صورة (C_h) بالانسحاب الذي شعاعه $-4\vec{j}$ (التمرين1)
2. إذا كان $f(x)\geq 0$ فإن $g(x)=f(x)$
و إذا كان $f(x)\leq 0$ فإن $g(x)=-f(x)$

إذن بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\geq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_f)

و بالنسبة للأعداد x التي تحقق $f(x)\leq 0$ يكون (C_g) منطبقا على (C_{-f})

و نعلم أن (C_{-f}) هي نظيرة (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل.

طريقة: لرسم التمثيل البياني للدالة $|f|$ نحتفظ بجزء (C_f) الواقع فوق محور الفواصل، و نرسم النظير بالنسبة إلى محور الفواصل لجزء (C_f) الواقع تحت محور الفواصل .

مركز تناظر

لاثبات أن النقطة $\omega(a;b)$ مركز تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)+f(a+x)=2b$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)+f(x)=2b$.

المقاربة 3: تغير المعلم $\begin{cases}x=a+X\\y=b+Y\end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة فردية

محور تناظر

لاثبات أنالمستقيم $(\Delta):x=a$ محور تناظر للمنحنى (C) في المعلم $(O;I,J)$.

dzprimaire.com

المقاربة 1:

من أجل كل x و $a-x$ و $a+x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(a-x)=f(a+x)$.

المقاربة 2 :

من أجل كل x و $2a-x$ من D (مجموعة تعريف الدالة) لدينا: $f(2a-x)=f(x)$.

المقاربة 3:

تغير المعلم $\begin{cases} x=a+X \\ y=b+Y \end{cases}$ كتابة معادلة (C) في المعلم $\omega(\vec{i};\vec{j})$ و اثبات أن الدالة المحصل عليها دالة زوجية.

dzprimaire.com

1

أذكر ان كانت الدالة f زوجية أم فردية في كل مما يلي:

.1 $f(x)=\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$ .2 $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}$ .3 $f(x)=\sqrt{1+(x+1)^2}+\sqrt{1+(x-1)^2}$

2

أوجد دور كل دالة مما يلي:

.1 $f(x)=\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ .2 $f(x)=\cos^2\left(\dfrac{x}{4}\right)$ .3 $f(x)=\tan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

3

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=2x^2-4x+2$.

1.بين أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=(g\circ h)(x)$ حيث g و h دالتان يطلب تعيينهما.

2.أرسم المنحنى (C_f) انطلاقا من المنحنى (C_g).

3. k دالة عددية معرفة كما يلي: $k(x)=2x^2-4|x|+2$

أ-بين أن الدالة k زوجية.

ب -بكتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة في المجال $]0;+\infty[$ استنتج رسم المنحنى (C_k) انطلاقا من المنحنى (C_f).

4

لتكن f الدالة العددية لمعرفة كما يلي: $f(x)=x^3-3x^2+3x-1$.

بين أن المنحنى (C_f) يقبل النقطة $A(1;0)$ كمركز تناظر ثم استنتج انشاء التمثيل البياني للدالة

5

لتكن f الدالة المعرفة على أكبر مجموعة ممكنة D جزء من $\mathbb{R}$ بِ: $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$

1. بين أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

2. بين أن: $f=g\circ h$ حيث g هي الدالة " الجذر التربيعي " و h دالة يطلب تحديدها.

3. تحقق أن من أجل كل x من D لدينا: $h(x)=1+\dfrac{1}{x+1}$. استنتج اتجاه تغيّر h على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$

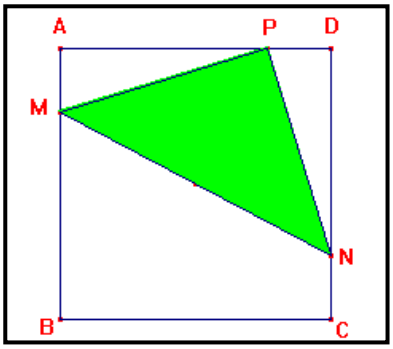
4. عين اتجاه تغير الدالة f على $]-\infty;-2]$ و على $]-1;+\infty[$

6

$ABCD$ مربع طول ضلعه $2cm$. نعتبر النقط M ، N و P حيث: $M\in[AB]$ ، $N\in[CD]$ و $P\in[AD]$.

نفرض أن النقطة M تتحرك على $[AB]$ مع: $AM=CN=DP$.

نضع $AM=x$ و نرمز بِ $f(x)$ إلى مساحة المثلث MNP .



1. عين D مجموعة تعريف f ثم تحقق أن: $f(x)=(x-1)^2+1$

2. أدرس على $[0;2]$ تغيرات الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على $[0;2]$.شكل جدول تغيرات f ثم عين وضعية M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن.

3. اشرح كيف يتم رسم (C_f) التمثيل البياني لِ f انطلاقا من القطع المكافئ: $y=x^2$ ثم ارسمه.

dzprimaire.com

حلول مقترحة

حل التمرين 1:

أذكر ان كانت الدالة f زوجية أم فردية في كل مما يلي:

1. $f(x)=\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}$

لدينا $D_f=\{x\in\mathbb{R}:x^2-2|x|\neq 0\}$ ، $x^2-2|x|\neq 0$ معناه : $|x|(|x|-2)=0\Rightarrow\begin{cases}|x|=2\\|x|=0\end{cases}$ و بالتالي: $x=0,x=2,x=-2$

$D_f=\mathbb{R}-\{-2,0,2\}$.

من أجل كل x و $-x$ من D_f لدينا:

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+2|-x|}{(-x)^2-2|-x|}=\dfrac{x^2+2|x|}{x^2-2|x|}=f(x)$ و عليه الدالة f زوجية.

2. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}$

لدينا $D_f=\{x\in\mathbb{R}:1+x\neq 0;1-x\neq 0\}$

$D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

من أجل كل x و $-x$ من D_f لدينا:

$$f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}-\frac{1+(-x)}{1-(-x)}=\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}$$
$$=-\left(\frac{1-x}{1+x}-\frac{1+x}{1-x}\right)=-f(x)$$

و عليه الدالة f فردية.

3. $f(x)=\sqrt{1+(x+1)^2}+\sqrt{1+(x-1)^2}$.

نلاحظ أن $D_f=\mathbb{R}$ و من أجل كل x و $-x$ من D_f لدينا:

$$f(-x)=\sqrt{1+(-x-1)^2}+\sqrt{1+(-x+1)^2}$$
$$=\sqrt{1+(x+1)^2}+\sqrt{1+(x-1)^2}$$
$$=f(x)$$

و عليه الدالة f زوجية.

dzprimaire.com

حل التمرين2 :

1. $f(x)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

ليكن p أصغر دور موجب للدالة f ، $\begin{cases} D_f=\mathbb{R} \\ f(x+p)=f(x) \end{cases}$.

$$\cos\left(3(x+p)-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}+3p\right)=\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)(k\in\mathbb{Z})$$

و منه $3p=2k\pi \Rightarrow p=\frac{2k\pi}{3}$ من أجل $k=1$ أي $p=\frac{2\pi}{3}$.

2. $f(x)=\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$

f دورية معناه $\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)=\cos^2\left(\frac{x}{4}+\frac{p}{4}\right)$ و بالتالي:

$\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{p}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{p}{4}\right)=-\cos\left(\frac{x}{4}\right) \end{cases}$ أي $\begin{cases} \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{p}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{4}\right) \\ \cos\left(\frac{x}{4}+\frac{p}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{4}\right) \end{cases}$ و عليه $p=4\pi$.

3. $f(x)=\tan\left(\frac{x}{3}\right)$.

$D_f=\mathbb{R}-\left\{x/\frac{x}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}$ ، f دورية معناه $\tan\left(\frac{x}{3}\right)=\tan\left(\frac{x}{3}+\frac{p}{3}\right)$.

نعلم أن دور الدالة $x\mapsto\tan x$ هو π و عليه $\frac{p}{3}=\pi\Rightarrow p=3\pi$.

حل التمرين 3:

f دالة عددية معرفة كما يلي: $f(x)=2x^2-4x+2$.

1.لدينا
$$f(x)=2x^2-4x+2=2\left(x^2-2x+1\right)$$
$$=2(x-1)^2$$

و عليه بأخذ $g(x)=2x^2$ و $h(x)=x-1$ نجد: $f(x)=(g\circ h)(x)$

2.أرسم المنحنى (C_f) انطلاقا من المنحنى (C_g).

المنحنى (C_f) هو صورة المنحنى (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$.

dzprimaire.com

3. k دالة عددية معرفة كما يلي: $k(x)=2x^2-4|x|+2$

أ- الدالة k زوجية.

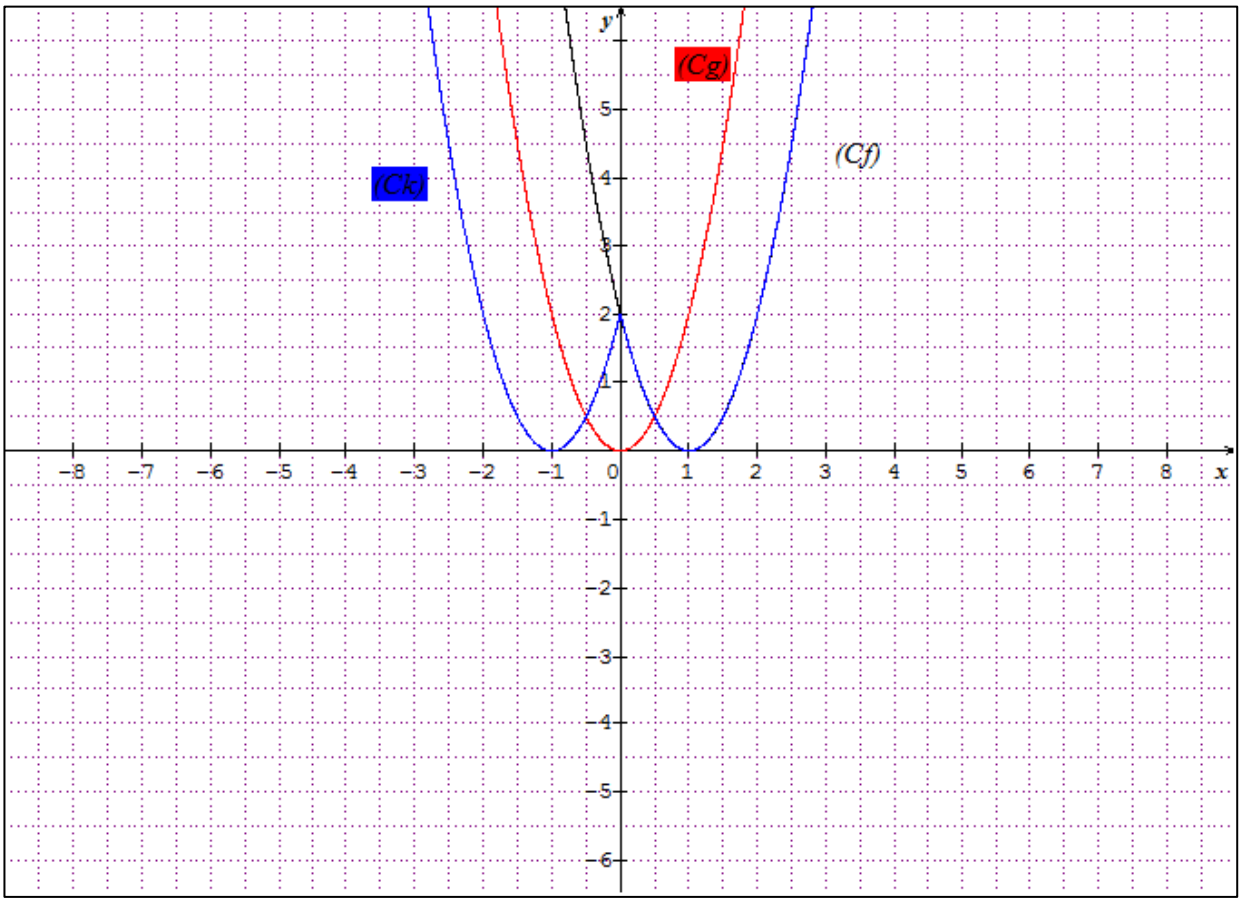
من أجل كل x و $-x$ من D_k لدينا $k(-x)=k(x)$ و بالتالي k دالة زوجية.

ب -كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة في المجال $]0;+\infty[$:

من أجل كل x موجب تماما $k(x)=2x^2-4x+2=f(x)$

استنتج رسم المنحنى (C_k)

منحنى (C_k) ينطبق على (C_f) من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$.



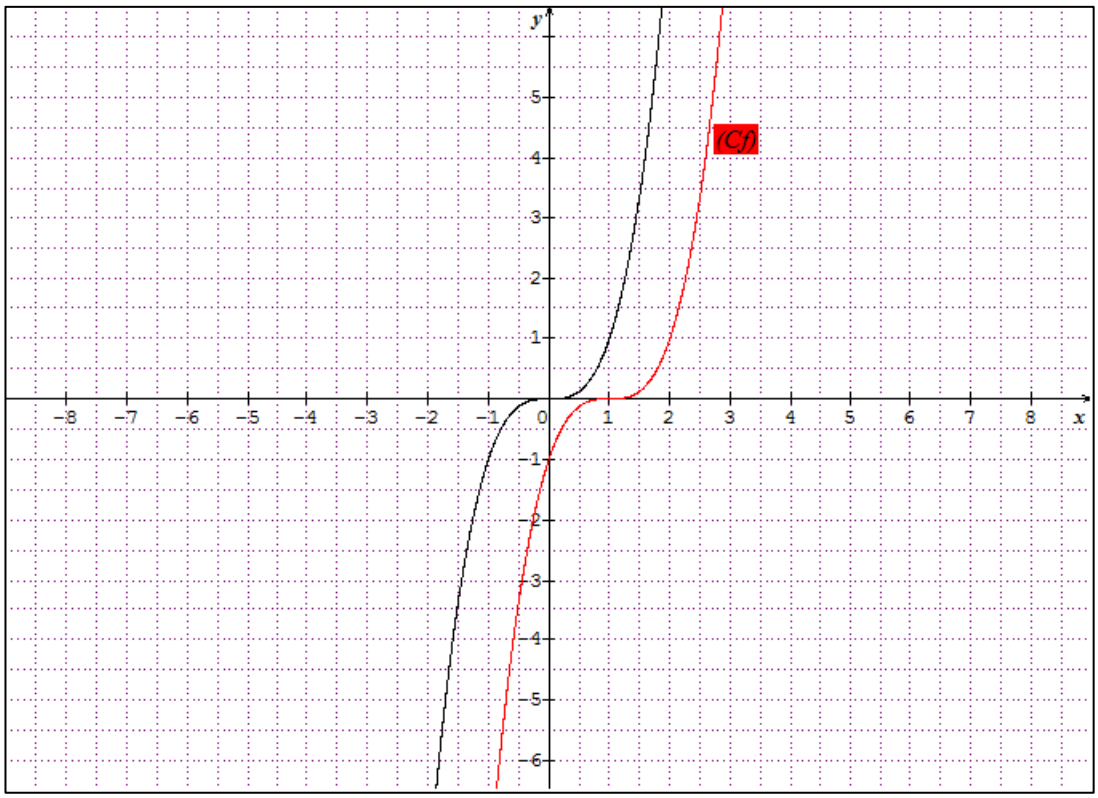
حل التمرين4:

$$\begin{aligned} f(2-x) &= (2-x)^3-3(2-x)^2+3(2-x)-1 \\ &= 8-12x+6x^2-x^3-12+12x-3x^2+6-3x-1 \\ &= -x^3+3x^2-3x-1 \\ &= 2(0)-f(x) \end{aligned}$$

و منه المنحنى (C_f) يقبل النقطة $A(1;0)$ كمركز تناظر.

لدينا $f(x)=x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$ و منه المنحنى (C_f) هو صورة منحنى الدالة: $x\mapsto x^3$ بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{i}$.

dzprimaire.com



حل التمرين5:

1. التحقق من أن $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

تكون الدالة f معرفة من أجل قيم x التي تحقق: $\frac{x+2}{x+1}\geq 0$ و $x+1\neq 0$. لندرس حسب قيم x إشارة $\frac{x+2}{x+1}$

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
$x+2$		-	0	+	|	+	
$x+1$		-	|	-	||	0 +	
$\frac{x+2}{x+1}$		+	0	-	||	+	

نستنتج من الجدول هكذا أن: $D=]-\infty;-2]\cup]-1;+\infty[$

2. تعيين الدالة h

بإتباع المخطط التالي: $x\mapsto\frac{x+2}{x+1}\mapsto\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$ و علما أن: $g:x\mapsto\sqrt{x}$ فإن: $h:x\mapsto\frac{x+2}{x+1}$

و لدينا فعلا: $f=g\circ h$

3. تغيرات الدالة h: لدينا من أجل كل x من D: $1+\frac{1}{x+1}=\frac{(x+1)+1}{x+1}=\frac{x+2}{x+1}=h(x)$

من $h(x)=1+\frac{1}{x+1}$ نستنتج أن اتجاه تغير h هو نفسه اتجاه تغير الدالة: $x\mapsto\frac{1}{x+1}$

نلاحظ كذلك أن الدالة: $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ هي مركب الدالة: $x\mapsto x+1$ متبوعة بالدالة: $x\mapsto\frac{1}{x}$

بما أن اتجاهي الدالتين $x\mapsto x+1$ و $x\mapsto\frac{1}{x}$ متعاكسان فإن الدالة $x\mapsto\frac{1}{x+1}$ متناقصة على $]-\infty;-2]$ وعلى $]-1;+\infty[$

dzprimaire.com

حل التمرين 6:

1. تعيين D و حساب $f(x)$: بما أن M تتحرك على $[AB]$ و $AB=2$ فإن: $D=[0;2]$

المثلث MNP متساوي الساقين و قائم في P ومنه: $f(x)=\frac{1}{2}MP^2=\frac{1}{2}\left[x^2+(2-x)^2\right]=x^2-2x+2$

لدينا: $(x-1)^2+1=x^2-2x+1+1=x^2-2x+2$ ومنه: $f(x)=(x-1)^2+1$

2. تغيرات الدالة f

الدالة: $x\mapsto(x-1)^2$ متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$ و بما أن للدالة: $x\mapsto(x-1)^2+1$

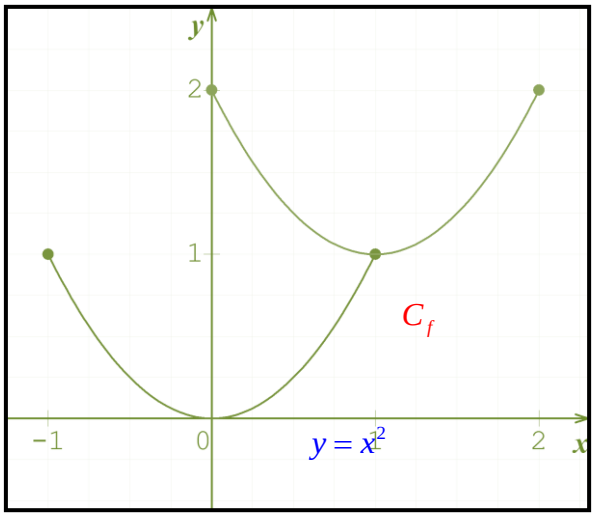
نفس اتجاه تغير $x\mapsto(x-1)^2$ فإن الدالة f متناقصة على $[0;1]$ و متزايدة على $[1;2]$.

x	0	1	2
$f(x)$	2 ↘	1	↗ 2

نلاحظ أن الدالة f تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة 1 لِـ x

إذن وضعية النقطة M التي تكون من أجلها مساحة المثلث MNP أصغر ما يمكن هي منتصف القطعة $[AB]$

3. رسم المنحني (C_f)



المنحني (C_f) هو صورة القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$

بواسطة الانسحاب الذي شعاعه $\vec{u}(1;1)$

نقوم برسم القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$

في المجال $[-1;1]$ ثم نستنتج المنحني (C_f)

المنحني (C_f) قطع مكافئ ذروته هي صورة النقطة O ذروة

القطع المكافئ ذو المعادلة $y=x^2$ بواسطة الانسحاب الذي

شعاعه $\vec{u}(1;1)$. و منه ذروة (C_f) هي النقطة $(1;1)$.

dzprimaire.com

التمرين الأول:

نعتبر الدالتين f و g حيث: $f(x)=\sqrt{x+1}-1$ ، $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}+1}$

1.أ-عين مجموعة تعريف كل من الدالتين f و g. ب- بين أن $f=g$.

2.أحسب و بسط $(f\circ h)(x)$ حيث: $h(x)=x^2-1$.

التمرين الثاني:: f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بالشكل: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I. 1.عين العددين الحقيقين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}-\{1\}$: $f(x)=a+\dfrac{b}{x-1}$

2.فكك الدالة f الى مركب دالتين مرجعيتين يطلب تعينهما.

3.استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجالين $]1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

4.بين أن المنحنى البياني للدالة f هو صورة المنحنى الباني للدالة مقلوب بانسحاب يطلب تعين شعاعه.

5.أنشئ (C_f) .

6.بين أن النقطة $\omega(1;2)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f).

II. g دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $g(x)=\dfrac{2|x|-1}{|x|-1}$

1.أكتب عبارة $g(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2.أوجد علاقة بين الدالة g و الدالة f .

3.استنتج طريقة لرسم منحنى الدالة g انطلاقا من (C_f).

التمرين الثالث: لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالشكل: $g(x)=x^2-x$. و (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}$ أنه: $g(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$

2.فكك الدالة g الى مركب دالتين يطلب تعينهما.

3.استنتج اتجاه تغير الدلة g على المجالين $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ و $\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

4. نعتبر الدالة h حيث: $h(x)=g(|x|)$. بين أن الدالة h زوجية ثم اشرح كيف يمكنك انشاء منحناها البياني.

dzprimaire.com

هذا العمل من طرف انسان و احتمال السهو فيه وارد فارجوا من القراء التبليغ و التنبيه عبر البريد الالكتروني الخاص بالأستاذ شعبان أسامة

Chbnoussama@gmail.com

تجدون هذا الملف عبر مختلف منصات التواصل الاجتماعي للصفحة

5min Maths

5min Maths

dzprimaire.com