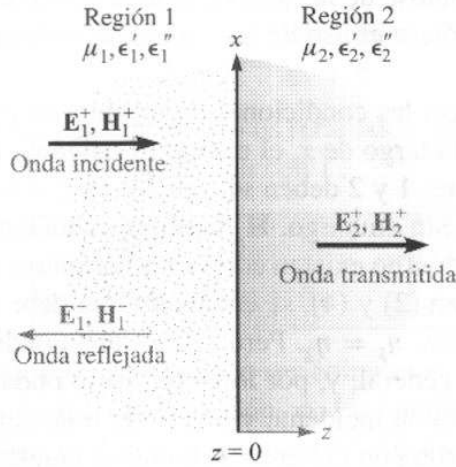


## Reflexión de ondas planas y dispersión

**E**n el capítulo 12 se aprendió cómo representar matemáticamente ondas planas uniformes en función de la frecuencia, las propiedades del medio y la orientación del campo eléctrico. Asimismo, se aprendió a calcular la velocidad de la onda, atenuación y potencia. En este capítulo se estudia la reflexión de ondas y la transmisión en las fronteras planas entre diferentes medios. Este estudio permitirá cualquier orientación entre la onda y la frontera e incluirá los casos importantes donde existan múltiples fronteras. Además se estudiarán los casos prácticos de ondas que transfieren potencia por medio de una banda finita de frecuencias, como podría ocurrir, por ejemplo, en una portadora modulada. Se considerarán dichas ondas en medios *dispersivos*, en los que algún parámetro que afecta la propagación (la permitividad, por ejemplo) varía con la frecuencia. Los efectos de un medio dispersivo en una señal son de gran importancia, pues la envolvente de la señal cambiará su forma a medida que se propague. En consecuencia, resultan problemáticas la detección y representación fidedigna de la señal original en el extremo receptor. Como resultado, tanto la dispersión como la atenuación deben evaluarse cuando se establezcan las distancias máximas de transmisión permisibles. ■

### 13.1 Reflexión de ondas planas uniformes que inciden perpendicularmente

Se considera, en primera instancia, el fenómeno de reflexión que se presenta cuando una onda plana uniforme incide en la frontera entre las regiones que se componen de dos materiales diferentes. El tratamiento se enfoca en el caso de la *incidencia perpendicular*, en la que la dirección de propagación de la onda es perpendicular a la frontera. En secciones posteriores esta restricción se elimina. Se buscarán expresiones para la onda que se refleja en la interfase y para aquella que se transmite de una región a otra. Estos resultados se relacionan directamente con problemas de acoplamiento de impedancias en líneas de transmisión ordinarias, como se estudió en el capítulo 11. También son aplicables a guías de ondas, las cuales se estudiarán en el capítulo 14.



**Figura 13.1** Dos vectores pueden sumarse gráficamente dibujándolos desde un origen común y completando el paralelogramo o haciendo que el segundo vector comience en la punta del primero y completando el triángulo; cada uno de estos métodos es fácilmente generalizado para el caso de tres o más vectores.

De nuevo se supondrá que sólo se tiene una componente vectorial de la intensidad de campo eléctrico. En la figura 13.1 se define la región 1 ( $\epsilon_1, \mu_1$ ) como la mitad del espacio para la cual  $z < 0$ ; la región 2 ( $\epsilon_2, \mu_2$ ) es la mitad del espacio para la cual  $z > 0$ . Desde el principio se definió una onda en la región 1, viajando en la dirección  $+z$  y polarizada linealmente a lo largo de  $x$ .

$$\mathcal{E}_{x1}^+(z, t) = E_{x10}^+ e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z)$$

En forma fasorial, esto es

$$E_{xs1}^+(z) = E_{x10}^+ e^{-jkz} \quad (1)$$

en donde se considera  $E_{x10}^+$  real. El subíndice 1 identifica la región y el supraíndice  $+$  indica una onda que se propaga positivamente. Asociado con  $E_{xs1}^+(z)$  está un campo magnético en la dirección de  $y$ ,

$$H_{ys1}^+(z) = \frac{1}{\eta_1} E_{x10}^+ e^{-jk_1 z} \quad (2)$$

donde  $k_1$  y  $\eta_1$  son complejos al menos que  $\epsilon_1''$  sea cero. A esta onda plana uniforme en la región 1 y que viaja hacia la superficie en la frontera en  $z = 0$  se le llama onda *incidente*. Puesto que la dirección de propagación de la onda incidente es perpendicular al plano de la frontera, se le identifica como incidencia normal.

Ahora se reconoce que la energía puede transmitirse a través de la superficie de la frontera en  $z = 0$  hacia la región 2, por medio de una onda que se mueva en la dirección  $+z$  en ese medio. Los campos fasoriales eléctrico y magnético para esta onda son

$$E_{xs2}^+(z) = E_{x20}^+ e^{-jk_2 z} \quad (3)$$

$$H_{ys2}^+(z) = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ e^{-jk_2 z} \quad (4)$$

Esta onda que se mueve alejándose de la superficie de la frontera hacia la región 2 se conoce como onda *transmitida*. Nótese el uso de las diferentes constantes de propagación,  $k_2$ , y la impedancia intrínseca  $\eta_2$ .

Ahora se deberán satisfacer las condiciones de frontera en  $z = 0$  con estos campos supuestos. Con  $\mathbf{E}$  polarizado a lo largo de  $x$ , el campo es tangente a la interfase y, por lo tanto, los campos  $\mathbf{E}$  en las regiones 1 y 2 deben ser iguales en  $z = 0$ . Establecer  $z = 0$  en (1) y (3) requiere que  $E_{x10}^+ = E_{x20}^-$ . Sin embargo,  $\mathbf{H}_y$  también es un campo tangencial y debe ser continuo a lo largo de la frontera (no existen corrientes laminares en medios reales). Sin embargo, cuando se hace  $z = 0$  en (2) y (4), se encuentra que debe tenerse  $E_{x10}^+/\eta_1 = E_{x20}^+/\eta_2$ . Dado que  $E_{x10}^+ = E_{x20}^-$ , entonces,  $\eta_1 = \eta_2$ . Pero ésta es una condición muy especial que no concuerda con los hechos en general, y, por lo tanto, no se pueden satisfacer las condiciones de frontera con sólo una onda incidente y una onda transmitida. Se requiere una onda que viaje alejándose de la frontera en la región 1, como se muestra en la figura 13.1; ésta se llama una onda *reflejada*,

$$E_{xs1}^-(z) = E_{x10}^- e^{jk_1 z} \quad (5)$$

$$H_{ys1}^-(z) = -\frac{E_{x10}^-}{\eta_1} e^{jk_1 z} \quad (6)$$

donde  $E_{x10}^-$  puede ser una cantidad compleja. Como este campo está viajando en la dirección  $-z$ ,  $E_{xs1}^- = -\eta_1 H_{ys1}^-$  puesto que el vector Poynting muestra que  $\mathbf{E}_1^- \times \mathbf{H}_1^-$  debe estar en la dirección  $-\mathbf{a}_z$ .

Las condiciones de frontera se pueden satisfacer ahora con facilidad, y en el proceso las amplitudes de las ondas transmitida y reflejada pueden encontrarse en términos de  $E_{x10}^+$ . La intensidad total del campo eléctrico es continua en  $z = 0$ ,

$$E_{xs1} = E_{xs2} \quad (z = 0)$$

o

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2}^+ \quad (z = 0)$$

Por lo tanto,

$$\boxed{E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{x20}^+} \quad (7)$$

Además,

$$H_{ys1} = H_{ys2} \quad (z = 0)$$

o

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2}^+ \quad (z = 0)$$

y, por lo tanto,

$$\boxed{\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{x20}^+}{\eta_2}} \quad (8)$$

Despejando  $E_{x20}^+$  en (8) y sustituyendo en (7), se encuentra que

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^+ - \frac{\eta_2}{\eta_1} E_{x10}^-$$

o

$$E_{x10}^- = E_{x10}^+ \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

La razón de amplitudes de los campos eléctricos reflejado e incidente se conoce con el nombre de *coeficiente de reflexión* y se representa con  $\Gamma$ ,

$$\Gamma = \frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma|e^{j\phi} \quad (9)$$

Es evidente que debido a que  $\eta_1$  y  $\eta_2$  pueden ser complejos,  $\Gamma$  también lo será, por lo que se incluye un corrimiento de fase de reflexión,  $\phi$ . La interpretación de la ecuación (9) es idéntica a la que se utilizó en las líneas de transmisión [ecuación (73), capítulo 11].

La amplitud relativa de la intensidad de campo eléctrico transmitido se encuentra combinando (9) y (7) para obtener el *coeficiente de transmisión*,  $\tau$ ,

$$\tau = \frac{E_{x20}^+}{E_{x10}^+} = \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} = 1 + \Gamma = |\tau|e^{j\phi_t} \quad (10)$$

cuya forma e interpretación son consistentes con su uso en las líneas de transmisión [ec. (75), capítulo 11].

Obsérvese cómo estos resultados pueden aplicarse a algunos casos especiales. Primero se deja que la región 1 sea un dieléctrico perfecto, y la región 2, un conductor perfecto. Después, se aplica la ecuación (48) del capítulo 12, con  $\epsilon_2' = \alpha_2/\omega$ , obteniendo,

$$\eta_2 = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{\sigma_2 + j\omega\epsilon_2'}} = 0$$

en la que se obtiene cero debido a que  $\sigma_2 \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, de (10),

$$E_{x20}^+ = 0$$

No pueden existir campos que varíen en el tiempo en un conductor perfecto. Una manera alterna de ver esto es notar que la profundidad de piel es cero.

Puesto que  $\eta_2 = 0$ , la ecuación (9) muestra que,

$$\Gamma = -1$$

y

$$E_{x10}^+ = -E_{x10}^-$$

Los campos incidente y reflejado son de igual magnitud, por lo que toda la energía incidente la refleja el conductor perfecto. El hecho de que dos campos sean de signo contrario indica que en la frontera (o en el momento de la reflexión) se presenta un corrimiento de fase de  $180^\circ$  en el campo reflejado en relación con el campo incidente. El campo total  $\mathbf{E}$  en la región 1 es,

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- \\ &= E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} - E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \end{aligned}$$



donde se considera que  $jk_1 = 0 + j\beta_1$  en un dieléctrico perfecto. Estos términos pueden combinarse y simplificarse,

$$\begin{aligned} E_{xs1} &= (e^{-j\beta_1 z} - e^{j\beta_1 z}) E_{x10}^+ \\ &= -j2 \sin(\beta_1 z) E_{x10}^+ \end{aligned} \quad (11)$$



### Animaciones

Multiplicando (11) por  $e^{j\omega t}$  y considerando la parte real, se obtiene la forma instantánea real:

$$\mathcal{E}_{x1}(z, t) = 2E_{x10}^+ \sin(\beta_1 z) \sin(\omega t) \quad (12)$$

Se reconoce este campo total en la región 1 como una onda estacionaria, la cual se obtuvo combinando dos ondas de igual amplitud viajando en direcciones opuestas. Primero se encontraron ondas estacionarias en las líneas de transmisión; sin embargo, estaban en la forma de ondas de voltaje que se propagaban en el sentido opuesto (véase ejemplo 11.1).

De nuevo, se compara la forma de (12) con la de la onda incidente,

$$\mathcal{E}_{x1}(z, t) = E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z) \quad (13)$$

En esta última ecuación se observa que el término  $\omega t - \beta_1 z$  o  $\omega(t - z/v_{p1})$ , que caracteriza una onda viajando en la dirección  $+z$  a una velocidad  $v_{p1} = \omega/\beta_1$ . Sin embargo, en (12) los factores que involucran tiempo y distancia son términos trigonométricos independientes. Siempre que  $\omega t = m\pi$ ,  $\mathcal{E}_{x1}$  será cero en cualquier posición. Por otro lado, se presentan ceros espaciales en el patrón de la onda estacionaria en todo momento donde  $\beta_1 z = m\pi$ , lo cual, a su vez, ocurre cuando  $m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ . En dichos casos,

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} z = m\pi$$

y la ubicación de los valles se presentan en

$$z = m \frac{\lambda_1}{2}$$

Por lo tanto,  $E_{x1} = 0$  en la frontera  $z = 0$  y en cada media longitud de onda a partir de la frontera en la región 1,  $z < 0$ , como se puede observar en la figura 13.2.

Puesto que  $E_{ys1}^+ = \eta_1$  y  $H_{ys1}^+ = E_{xs1}^- - \eta_1 H_{ys1}^-$ , el campo magnético es

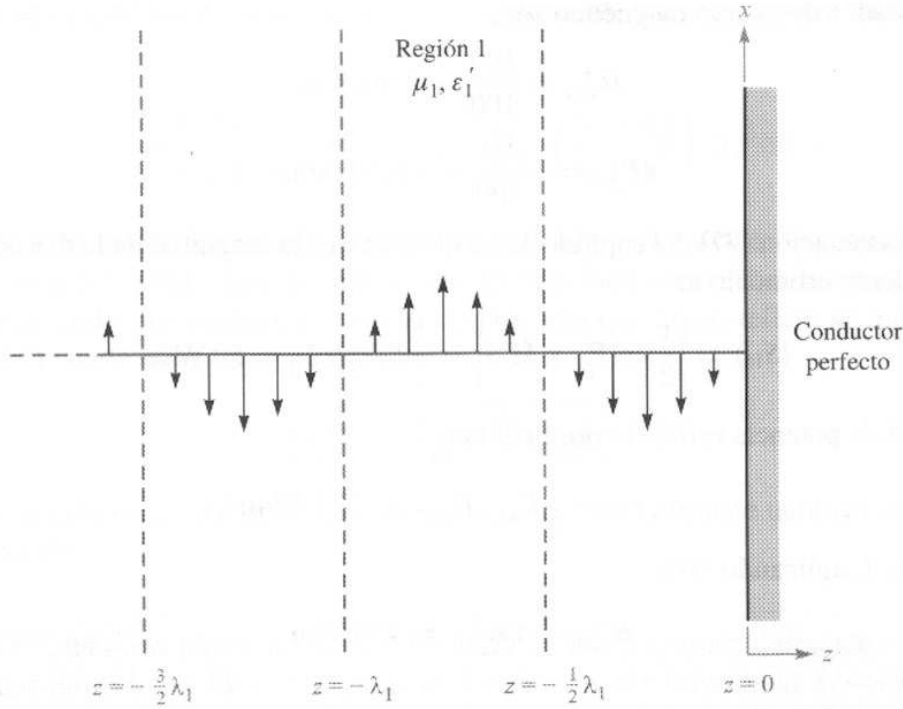
$$H_{ys1} = \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} + e^{j\beta_1 z})$$

o

$$H_{y1}(z, t) = 2 \frac{E_{x10}^+}{\eta_1} \cos(\beta_1 z) \cos(\omega t) \quad (14)$$

Esto también es una onda estacionaria, pero con una amplitud máxima en los puntos donde  $E_{x1} = 0$ . También está  $90^\circ$  fuera de fase con respecto a  $E_{x1}$  en cualquier punto. Como resultado, la potencia promedio como está determinada por el vector Poynting [ecuación (77), capítulo 12] es cero en las direcciones hacia delante y hacia atrás.

Ahora, considérense dieléctricos perfectos en ambas regiones, 1 y 2;  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son cantidades reales positivas y  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . La ecuación (9) permite el cálculo del coeficiente de



**Figura 13.2** Los valores instantáneos del campo total  $E_{x1}$  se muestran en  $t = \pi/2$ .  $E_{x1} = 0$  para todo tiempo que sea múltiplo de la mitad de la longitud de onda desde la superficie conductora.

reflexión y encontrar  $E_{x1}^-$  en términos del campo incidente  $E_{x1}^+$ . Conociendo  $E_{x1}^+$  y  $E_{x1}^-$ , entonces se calcula  $E_{y1}^+$  y  $E_{y1}^-$ . En la región 2,  $E_{x2}^+$  se obtiene de (10) y éste, entonces, determina  $H_{y2}^+$ .

### EJEMPLO 13.1

Se selecciona como ejemplo numérico,

$$\eta_1 = 100 \, \Omega$$

$$\eta_2 = 300 \, \Omega$$

$$E_{x10}^+ = 100 \, \text{V/m}$$

y se calculan los valores de la ondas incidente, reflejada y transmitida.

**Solución.** El coeficiente de reflexión es

$$\Gamma = \frac{300 - 100}{300 + 100} = 0.5$$

y, por lo tanto,

$$E_{x10}^- = 50 \, \text{V/m}$$

Las intensidades de campo magnético son,

$$H_{y10}^+ = \frac{100}{100} = 1.00 \text{ A/m}$$

$$H_{y10}^- = -\frac{50}{100} = -0.50 \text{ A/m}$$

Aplicando la ecuación (77) del capítulo 12 se observa que la magnitud de la densidad de potencia incidente promedio es

$$\langle S_{1i} \rangle = \left| \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} \right| = \frac{1}{2} E_{x10}^+ H_{y10}^+ = 50 \text{ W/m}^2$$

La densidad de potencia reflejada promedio es,

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2} E_{x10}^- H_{y10}^- = 12.5 \text{ W/m}^2$$

En la región 2, aplicando (10),

$$E_{x20}^+ = \tau E_{x10}^+ = 150 \text{ V/m}$$

y

$$H_{y20}^+ = \frac{150}{300} = 0.500 \text{ A/m}$$

Por lo tanto, la densidad de potencia promedio que se transmite de la frontera a la región 2, es,

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} E_{x20}^+ H_{y20}^+ = 37.5 \text{ W/m}^2$$

Se puede comprobar y confirmar el requisito para la conservación de potencia:

$$\langle S_{1i} \rangle = \langle S_{1r} \rangle + \langle S_2 \rangle$$

Es posible formular una regla general sobre la transferencia de potencia por medio de la reflexión y la transmisión. Considérese, como se hizo antes, los mismos campos vectoriales y orientaciones de la interfase, pero permítase que se consideren impedancias complejas. Para el cálculo de la densidad de la potencia incidente se tiene,

$$\langle S_{1i} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs1}^+ H_{ys1}^{+*} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_1^*} E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*} \right\} |E_{x10}^+|^2$$

Por lo tanto, la densidad de potencia reflejada es,

$$\langle S_{1r} \rangle = -\frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs1}^- H_{ys1}^{-*} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \Gamma E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_1^*} \Gamma^* E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_1^*} \right\} |E_{x10}^+|^2 |\Gamma|^2$$

Por lo tanto, se encuentra la relación general entre la potencia reflejada e incidente:

$$\langle S_{1r} \rangle = |\Gamma|^2 \langle S_{1i} \rangle \quad (15)$$

De manera similar, se encuentra la densidad de potencia transmitida:

$$\langle S_2 \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{xs2}^+ H_{ys2}^{+*} \} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \tau E_{x10}^+ \frac{1}{\eta_2^*} \tau^* E_{x10}^{+*} \right\} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta_2^*} \right\} |E_{x10}^+|^2 |\tau|^2$$

por lo que se ve que las densidades de potencia incidente y transmitida se relacionan por medio de

$$\langle S_2 \rangle = \frac{\operatorname{Re}\{1/\eta_2^*\}}{\operatorname{Re}\{1/\eta_1^*\}} |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle = \left| \frac{\eta_1}{\eta_2} \right|^2 \left( \frac{\eta_2 + \eta_2^*}{\eta_1 + \eta_1^*} \right) |\tau|^2 \langle S_{1i} \rangle \quad (16)$$

La ecuación (16) es una forma relativamente complicada para calcular la potencia transmitida, a menos que las impedancias sean reales. Es más fácil aprovechar la conservación de energía observando que cualquier cantidad de potencia que no se refleje se transmite. La ecuación (15) puede utilizarse para encontrar,

$$\langle S_2 \rangle = (1 - |\Gamma|^2) \langle S_{1i} \rangle \quad (17)$$

Como se esperaba (y lo cual debe ser válido), la ecuación (17) puede también deducirse de la ecuación (16).

**D13.1** Una onda plana uniforme de 1 MHz incide perpendicularmente en un lago con agua dulce ( $\epsilon_r' = 78$ ,  $\epsilon_r'' = 0$ ,  $\mu_r = 1$ ). Determinése la fracción de la onda incidente que es *a*) reflejada y *b*) transmitida. *c*) Determinése  $\epsilon''$  la amplitud del campo eléctrico que se transmite hacia el lago.

**Respuesta:** 0.63; 0.37; 0.20 V/m.

## 13.2 Razón de onda estacionaria

En los casos donde  $|\Gamma| < 1$ , cierta energía se transmite hacia la segunda región y otra parte se refleja. Por lo tanto, la región 1 soporta un campo compuesto tanto por una onda viajera como por una estacionaria. Esta situación se encontró antes en las líneas de transmisión, en las cuales se presentaba una reflexión parcial en la carga. Las mediciones de la razón de la onda estacionaria de voltaje y de los puntos de máximo y mínimo voltaje permitieron determinar una impedancia de carga desconocida o establecieron el grado hasta el cual la impedancia de carga estaba acoplada a la de la línea (sección 11.10). Se pueden llevar a cabo mediciones similares de las amplitudes del campo en la reflexión de ondas planas.

La utilización de los mismos campos que se investigaron en la sección anterior permite combinar las intensidades de los campos incidente y reflejado. Se supone que el medio 1 es un dieléctrico perfecto ( $\alpha_1 = 0$ ), mientras que la región 2 puede ser de cualquier material. El fasor de campo eléctrico total en la región 1 será,

$$E_{x1T} = E_{x1}^+ + E_{x1}^- = E_{x10}^+ e^{-j\beta_1 z} + \Gamma E_{x10}^+ e^{j\beta_1 z} \quad (18)$$

en donde el coeficiente de reflexión es, como se expresó en (9):

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = |\Gamma| e^{j\phi}$$

Se admite la posibilidad de que el coeficiente de reflexión sea un número complejo, incluyendo su fase  $\phi$ . Esto es necesario debido a pesar de que  $\eta_1$  es real y positivo para un medio

sin pérdidas;  $\eta_2$  será, generalmente, complejo. Además, si la región 2 es un conductor perfecto,  $\eta_2$  es igual a cero, por lo que  $\phi$  será igual a  $\pi$ ; si  $\eta_2$  es real y menor a  $\eta_1$ ,  $\phi$  será también igual a  $\pi$ ; y si  $\eta_2$  es real y mayor que  $\eta_1$ ,  $\phi$  será igual a cero.

Incorporando la fase de  $\Gamma$  en (18), el campo total en la región 1 será,

$$E_{x1T} = (e^{-j\beta_1 z} + |\Gamma|e^{j(\beta_1 z + \phi)})E_{x10}^+ \quad (19)$$

Las amplitudes de campo máxima y mínima en (19) dependen de  $z$  y están sujetas a medición. Su razón, como se encontró en el caso de las amplitudes de voltaje en las líneas de transmisión (sección 11.10), es la *razón de onda estacionaria*, la cual se denota con  $s$ . Se tiene un máximo cuando cada término en los corchetes de (19) tiene el mismo ángulo de fase; así que para un valor de  $z$  positivo y real,

$$|E_{x1T}|_{\text{máx}} = (1 + |\Gamma|)E_{x10}^+ \quad (20)$$

y esto ocurre donde

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (21)$$

Por lo tanto,

$$z_{\text{máx}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + 2m\pi) \quad (22)$$

Nótese que un valor máximo del campo eléctrico está en el plano de frontera ( $z = 0$ ) si  $\phi = 0$ ; además,  $\phi = 0$  cuando  $\Gamma$  es real y positivo. Esto ocurre para valores de  $\eta_1$  y  $\eta_2$  reales cuando  $\eta_2 > \eta_1$ . Por lo tanto, existe un valor máximo del campo en la superficie de la frontera cuando la impedancia intrínseca de la región 2 es mayor que la de la región 1 y ambas impedancias son reales. Cuando  $\phi = 0$ , también ocurre un máximo en  $z_{\text{máx}} = -m\pi/\beta_1 = -m\lambda_1/2$ .

Para un conductor perfecto,  $\phi = \pi$ , y éste máximo se encuentra en  $z_{\text{máx}} = -\pi/(2\beta_1)$ ,  $-3\pi/(2\beta_1)$  o  $z_{\text{máx}} = -\lambda_1/4$ ,  $-3\lambda_1/4$ , y así sucesivamente.

El valor mínimo debe ocurrir donde los ángulos de fase de los dos términos en los corchetes de la ecuación (19) difieren en  $180^\circ$ , por lo tanto,

$$|E_{x1T}|_{\text{mín}} = (1 - |\Gamma|)E_{x10}^+ \quad (23)$$

y esto ocurre donde,

$$-\beta_1 z = \beta_1 z + \phi + \pi + 2m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (24)$$

o

$$z_{\text{mín}} = -\frac{1}{2\beta_1}(\phi + (2m + 1)\pi) \quad (25)$$

Los valores mínimos están separados entre sí por múltiplos de media longitud de onda (así como los valores máximos), y para el conductor perfecto, el primer mínimo ocurre cuando  $-\beta_1 z = 0$  o en la superficie conductora. En general, un valor mínimo de campo eléctrico se encuentra en  $z = 0$  siempre que  $\phi = \pi$ ; esto ocurre si  $\eta_2 < \eta_1$  y ambos son reales. Los resultados son matemáticamente iguales a los que se encontraron en el estudio de las líneas de transmisión de la sección 11.10. La figura 11.6 muestra una visualización.

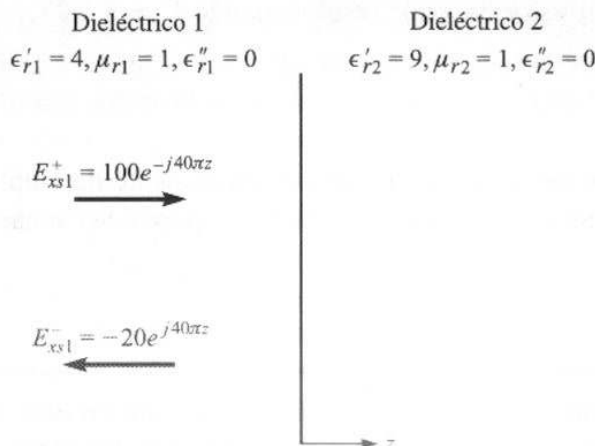
Es posible obtener un conocimiento más profundo trabajando con la ecuación (19) y reescribiéndola en su forma instantánea real. Los pasos son idénticos a los que se siguieron en el capítulo 11, ecuaciones desde (81) hasta (84). Se puede ver que el campo total en la región 1 es

$$\mathcal{E}_{x1T}(z, t) = \underbrace{(1 - |\Gamma|)E_{x10}^+ \cos(\omega t - \beta_1 z)}_{\text{onda viajera}} + \underbrace{2|\Gamma|E_{x10}^+ \cos(\beta_1 z + \phi/2) \cos(\omega t + \phi/2)}_{\text{onda estacionaria}} \quad (26)$$

El campo expresado en (26) es la suma de una onda viajera de amplitud  $(1 - |\Gamma|)$  y una onda estacionaria con amplitud  $2|\Gamma|$ . La porción de la onda incidente que se refleja y se propaga de regreso en la región 1 interfiere con una porción equivalente de la onda incidente para formar una onda estacionaria. El resto de la onda incidente (la que no interfiere) es la onda viajera de la ecuación (26). La amplitud máxima observada en la región 1 está donde las amplitudes de los dos términos de (26) se suman directamente para dar  $(1 + |\Gamma|)$ . La amplitud mínima se ubica donde la onda estacionaria alcanza un cero, dejando sólo una amplitud de la onda viajera de  $(1 - |\Gamma|)$ . El hecho de que los dos términos en (26) se combinen así con la fase correcta puede confirmarse sustituyendo  $z_{\text{máx}}$  y  $z_{\text{mín}}$ , en la forma dada en las ecuaciones (22) y (25).

### EJEMPLO 13.2

Con el fin de ilustrar algunos de estos resultados, considérese una onda de 100 V/m y 3 GHz propagándose en un material que tiene un  $\epsilon'_{r1} = 4$ ,  $\mu_{r1} = 1$  y  $\epsilon''_{r1} = 0$ . La onda incide perpendicularmente sobre otro dieléctrico perfecto en la región 2,  $z > 0$ , donde  $\epsilon'_{r2} = 9$  y  $\mu_{r2} = 1$  (figura 13.3). Se busca la ubicación de los puntos máximo y mínimo de  $\mathbf{E}$ .



**Figura 13.3** Una onda incidente,  $E_{xs1}^+ = 100e^{-j40\pi z}$  V/m, se refleja con un coeficiente de reflexión  $\Gamma = -0.2$ . El dieléctrico 2 tiene un grosor infinito.



**Solución.** Se calcula  $\omega = 6\pi \times 10^9$  rad/s,  $\beta_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1} = 40\pi$  rad/m y  $\beta_2 = \sqrt{\omega\mu_2\epsilon_2} = 60\pi$  rad/m. Aunque la longitud de onda sería de 10 cm en el aire, se observa que  $\lambda_1 = 2\pi/\beta_1 = 5$  cm,  $\lambda_2 = 2\pi/\beta_2 = 3.33$  cm,  $\eta_1 = 60\pi\omega$ ,  $\eta_2 = 40\pi\omega$  y  $\Gamma = (\eta_2 - \eta_1)/(\eta_2 + \eta_1) = -0.2$ . Puesto que  $\Gamma$  es real y negativo ( $\eta_2 < \eta_1$ ), habrá un máximo del campo eléctrico en la frontera, y se repetirá a intervalos de media longitud de onda (2.5 cm) en el dieléctrico 1. De la ecuación (23), se deduce que  $|E_{x1T}|_{\min} = 80$  V/m.

El valor máximo de  $\mathbf{E}$  se encuentra a distancias de 1.25, 3.75, 6.25, ... cm de  $z = 0$ . Todos estos puntos máximos tienen amplitudes de 120 V/m, como lo predijo la ecuación (20).

No existe ningún máximo o mínimo en la región 2, ya que no hay ondas reflejadas ahí.

La razón de amplitudes máxima y mínima es la razón de onda estacionaria:

$$s = \frac{|E_{x1T}|_{\max}}{|E_{x1T}|_{\min}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} \quad (27)$$

Puesto que  $|\Gamma| < 1$ ,  $s$  siempre es positivo y mayor que o igual a la unidad. En el ejemplo anterior,

$$s = \frac{1 + |-0.2|}{1 - |-0.2|} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$$

Si  $|\Gamma| = 1$ , las amplitudes reflejada e incidente son iguales, es decir, toda la energía incidente es reflejada y  $s$  es infinito. Se pueden encontrar planos separados por múltiplos de  $\lambda_1/2$  en los que  $E_{x1}$  es igual a cero en todo momento. En el punto medio entre estos dos planos,  $E_{x1}$  tiene una amplitud máxima igual al doble de la correspondiente a la onda incidente.

Si  $\eta_2 = \eta_1$ , entonces,  $\Gamma = 0$ , no se refleja energía y  $s = 1$ ; las amplitudes máxima y mínima son iguales.

Si la mitad de la potencia incidente es reflejada,  $|\Gamma|^2 = 0.5$ ,  $|\Gamma| = 0.707$  y  $s = 5.83$ .

**D13.2** ¿Cuál es el valor de  $s$  que resulta cuando  $\Gamma = \pm 1/2$ ?

**Respuesta:** 3

Puesto que la razón de onda estacionaria es un cociente de amplitudes, las amplitudes relativas medidas con una sonda permite emplear ésta para determinar  $s$  experimentalmente.

### EJEMPLO 13.3

Una onda plana uniforme en el aire se refleja parcialmente en una superficie hecha de un material cuyas propiedades se desconocen. Las mediciones del campo eléctrico en la región ubicada enfrente de la interfase indican un espaciamiento entre máximos de 1.5 m, con el primer máximo a 0.75 m de la interfase. Se mide una razón de onda estacionaria de 5. Determínese la impedancia intrínseca,  $\eta_u$ , del material desconocido.

**Solución.** El espaciamiento de 1.5 m entre máximos es de  $\lambda/2$ , lo que implica una longitud de onda de 3.0 m o  $f = 100$  MHz. El primer máximo a 0.75 m está, por lo tanto, a una distancia de  $\lambda/4$  de la interfase, lo que significa que un mínimo ocurre en la frontera. Por lo tanto, el valor de  $\Gamma$  será real y negativo. Utilizando (27) se puede escribir,

$$|\Gamma| = \frac{s-1}{s+1} = \frac{5-1}{5+1} = \frac{2}{3}$$

Así que,

$$\Gamma = -\frac{2}{3} = \frac{\eta_u - \eta_0}{\eta_u + \eta_0}$$

en la que se despeja  $\eta_u$  para obtener,

$$\eta_u = \frac{1}{5}\eta_0 = \frac{377}{5} = 75.4 \Omega$$

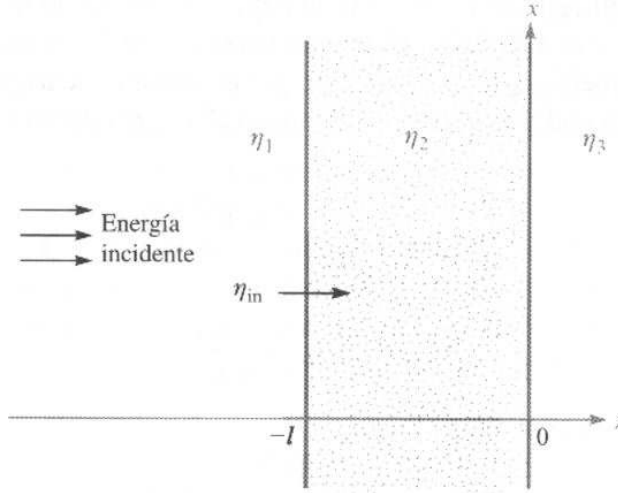
### 13.3 Reflexión de ondas sobre múltiples interfases

Hasta el momento, la reflexión de ondas se ha estudiado en una sola frontera que se presenta entre medios semiinfinitos. En esta sección se estudiará la reflexión de ondas en materiales finitos en tamaño, de tal forma que se deberán considerar los efectos de las superficies de adelante y atrás. Dicho problema de doble interfase ocurre, por ejemplo, cuando la luz incide sobre una superficie plana de vidrio. Existen interfases adicionales si el vidrio está recubierto con una o más capas de material dieléctrico, con el propósito (como se verá posteriormente) de reducir las reflexiones. Estos problemas en los que está involucrada más de una interfase se presentan con mucha frecuencia; los problemas de una sola interfase, de hecho, son la excepción más que la regla.

Considérese la situación general mostrada en la figura 13.4, en la que una onda plana uniforme propagándose en la dirección  $z$  hacia delante incide perpendicularmente desde la izquierda hacia la interfase entre las regiones 1 y 2; éstas tienen impedancias intrínsecas  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . Una tercera región con una impedancia  $\eta_3$  se ubica más allá de la región 2, así que existe una segunda interfase entre las regiones 2 y 3. La ubicación de la segunda interfase es  $z = 0$ , por lo que todas las posiciones a la izquierda quedarán descritas con valores negativos de  $z$ . El grosor de la segunda región es  $l$ , así que la primera interfase ocurrirá en la posición  $z = -l$ .

Cuando la onda incidente llega a la primera interfase, los eventos ocurren de la manera siguiente: una porción de la onda se refleja, mientras que el resto se transmite para propagarse hacia la segunda interfase. Una vez ahí, una porción se transmite hacia la región 3, mientras que el resto se refleja y regresa a la primera interfase; ahí se refleja parcialmente otra vez. Esta onda reflejada se combina después con la adicional energía transmitida desde la región 1, y el proceso se repite. Por lo tanto, se tiene una secuencia complicada de múltiples reflexiones que ocurren dentro de la región 2, con una transmisión parcial en cada viaje. El análisis de la situación en esta forma involucraría mantener el registro de un gran número de reflexiones; esto sería necesario cuando se estudiara la fase *transitoria* del proceso, donde la onda incidente encuentre por primera vez las interfases.

Sin embargo, si la onda incidente se mantiene así todo el tiempo, al final se alcanzará una situación de *estado estable*, en la que: (1) una fracción de la onda incidente se refleja



**Figura 13.4** Problema básico de dos interfases, en el que las impedancias de las regiones 2 y 3, junto con el grosor finito de la región 2, se consideran en la impedancia de entrada en la superficie frontal,  $\eta_{\text{ent}}$ .

en la configuración de doble interfase y se propaga hacia atrás en la región 1 con una amplitud y fase determinadas; (2) una fracción de la onda incidente se transmite a través de las dos interfases y se propaga hacia delante rumbo a la tercera región; (3) una onda neta hacia atrás está presente en la región 2, la cual forma todas las ondas reflejadas de la segunda interfase; y (4) una onda neta hacia delante está presente en la región 2, la cual es la superposición de la onda transmitida a través de la primera interfase, y todas las ondas de la región 2 que se han reflejado en la primera interfase se propagan ahora hacia delante. El efecto de la combinación de muchas ondas que se propagan simultáneamente de esta forma es establecer una sola onda que tenga una amplitud y fase definida, determinada a través de las sumas de las amplitudes y fases de todas las componentes de la onda. En estado estable, por lo tanto, se tiene un total de cinco ondas que considerar. Éstas son las ondas neta y reflejada en la región 1, la onda transmitida neta en la región 3, y las dos ondas que se propagan en direcciones opuestas en la región 2.

La situación se analiza de la misma forma a la que se utilizó en el análisis de líneas de transmisión de longitud finita (sección 11.11). Supóngase que todas las regiones se componen de un medio sin pérdidas y considérense las dos ondas de la región 2. Si éstas se consideran como polarizadas en  $x$ , sus campos eléctricos se suman para dar,

$$E_{xs2} = E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z} \quad (28a)$$

en donde  $\beta_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{r2}}/c$ , y donde las amplitudes,  $E_{x20}^+$  y  $E_{x20}^-$ , son complejas. El campo magnético polarizado en  $y$  se escribe de forma similar, utilizando las amplitudes complejas:

$$H_{ys2} = H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z} \quad (28b)$$

Ahora se puede observar que las amplitudes de los campos eléctricos hacia delante y hacia atrás de la región 2 se relacionan mediante el coeficiente de reflexión en la segunda interfase,  $\Gamma_{23}$ , donde

$$\Gamma_{23} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad (29)$$

Por lo tanto, se tiene

$$E_{x20}^- = \Gamma_{23} E_{x20}^+ \quad (30)$$

Después, las amplitudes de los campos magnéticos se expresan en términos de las amplitudes de los campos eléctricos por medio de,

$$H_{y20}^+ = \frac{1}{\eta_2} E_{x20}^+ \quad (31a)$$

y

$$H_{y20}^- = -\frac{1}{\eta_2} E_{x20}^- = -\frac{1}{\eta_2} \Gamma_{23} E_{x20}^+ \quad (31b)$$

Ahora se define la *impedancia de la onda*,  $\eta_w$ , como la razón dependiente de  $z$  del campo eléctrico total y el campo magnético total. En la región 2 esto se convierte, utilizando (28a) y (28b), en

$$\eta_w(z) = \frac{E_{xs2}}{H_{ys2}} = \frac{E_{x20}^+ e^{-j\beta_2 z} + E_{x20}^- e^{j\beta_2 z}}{H_{y20}^+ e^{-j\beta_2 z} + H_{y20}^- e^{j\beta_2 z}}$$

Posteriormente, utilizando (30), (31a) y (31b), se obtiene

$$\eta_w(z) = \eta_2 \left[ \frac{e^{-j\beta_2 z} + \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}}{e^{-j\beta_2 z} - \Gamma_{23} e^{j\beta_2 z}} \right]$$

A continuación, utilizando (29) y la identidad de Euler, se tiene

$$\eta_w(z) = \eta_2 \times \frac{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \sin \beta_2 z) + (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \sin \beta_2 z)}{(\eta_3 + \eta_2)(\cos \beta_2 z - j \sin \beta_2 z) - (\eta_3 - \eta_2)(\cos \beta_2 z + j \sin \beta_2 z)}$$

Esta expresión se simplifica fácilmente para dar,

$$\eta_w(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 z - j \eta_2 \sin \beta_2 z}{\eta_2 \cos \beta_2 z - j \eta_3 \sin \beta_2 z} \quad (32)$$

Ahora se emplea la impedancia de onda en la región 2 para resolver el problema de reflexión. Reviste interés la amplitud neta de la onda reflejada en la primera interfase. Puesto que  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  tangenciales son continuas a través de la frontera, se tiene

$$E_{xs1}^+ + E_{xs1}^- = E_{xs2} \quad (z = -l) \quad (33a)$$

y

$$H_{ys1}^+ + H_{ys1}^- = H_{ys2} \quad (z = -l) \quad (33b)$$

Entonces, en analogía con (7) y (8), se puede escribir

$$E_{x10}^+ + E_{x10}^- = E_{xs2}(z = -l) \quad (34a)$$

y

$$\frac{E_{x10}^+}{\eta_1} - \frac{E_{x10}^-}{\eta_1} = \frac{E_{xs2}(z = -l)}{\eta_w(-l)} \quad (34b)$$

donde  $E_{x10}^+$  y  $E_{x10}^-$  son las amplitudes de los campos incidente y reflejado. Se le llama  $\eta_w(-l)$ , *impedancia de entrada*,  $\eta_{ent}$ , a la combinación de las dos interfaces. Ahora se resuelven las ecuaciones (34a) y (34b), eliminando  $E_{xs2}$ , para obtener

$$\frac{E_{x10}^-}{E_{x10}^+} = \Gamma = \frac{\eta_{\text{ent}} - \eta_1}{\eta_{\text{ent}} + \eta_1} \quad (35)$$

Para encontrar la impedancia de entrada se evalúa (32) en  $z = -l$ , por lo que se obtiene,

$$\eta_{\text{ent}} = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos \beta_2 l + j \eta_2 \sin \beta_2 l}{\eta_2 \cos \beta_2 l + j \eta_3 \sin \beta_2 l} \quad (36)$$

Las ecuaciones (35) y (36) expresan resultados generales que permiten calcular la amplitud y fase de la onda reflejada neta a partir de dos interfases paralelas ubicadas entre medios sin pérdidas.<sup>1</sup> Nótese la dependencia en el espaciamiento de la interfase,  $l$ , y en la longitud de onda medida en la región 2, caracterizada por  $\beta_2$ . De primera importancia para nosotros es la fracción de la potencia incidente que se refleja de la interfase dual y se propaga hacia atrás en la región 1. Como ya se estudió, esta fracción será  $|\Gamma|^2$ . Asimismo, reviste especial interés la potencia transmitida, que se propaga alejándose de la segunda interfase de la región 3. Es simplemente la fracción de potencia restante, que es  $1 - |\Gamma|^2$ . La potencia en la región 2 permanece constante en estado estable; la potencia se aleja de la región para formar las ondas transmitida y reflejada, pero inmediatamente llega la potencia de la onda incidente. Con anterioridad se encontró una situación análoga, la cual involucraba líneas de transmisión en cascada, que culminaba en la ecuación (101) del capítulo 11.

Un resultado importante de las situaciones que involucran dos interfases es que posibilitan lograr la transmisión total en ciertos casos. En la ecuación (35) se observa que la transmisión total ocurre cuando  $\Gamma = 0$ , o cuando  $\eta_{\text{ent}} = \eta_1$ . En este caso, como en el de las líneas de transmisión, se dice que la impedancia de entrada está *acoplada* a la del medio incidente. Existen varios métodos para llevar esto a cabo.

Para comenzar, supóngase que  $\eta_3 = \eta_1$ , y que la región 2 es de tal grosor que  $\beta_2 l = m\pi$ , donde  $m$  es un entero. Ahora,  $\beta_2 = 2\pi/\lambda_2$ , donde  $\lambda_2$  es la longitud de onda medida en la región 2. Por lo tanto,

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = m\pi$$

o

$$l = m \frac{\lambda_2}{2} \quad (37)$$

Con  $\beta_2 l = m\pi$ , el grosor de la segunda región es un entero múltiplo de media longitud de onda medida en ese medio. La ecuación (36) se reduce a  $\eta_{\text{ent}} = \eta_3$ . Por lo tanto, el efecto general de tener un grosor que sea múltiplo de media longitud de onda es volver irrelevante

<sup>1</sup> Por conveniencia, (34a) y (34b) se han escrito para un tiempo específico en el que la amplitud de la onda incidente,  $E_{x10}^+$  ocurre en  $z = -l$ . Esto establece una referencia de fase cero en la interfase frontal para la onda incidente y es a raíz de esta referencia que se puede determinar la fase de la onda reflejada. De forma equivalente, se ha reposicionado el punto  $z = 0$  en la interfase frontal. La ecuación (36) permite esto porque está solamente en función del espaciamiento,  $l$ , en la interfase.



la segunda región de los resultados de la reflexión y transmisión. De manera equivalente, se tiene un problema de interfase única que involucra a  $\eta_1$  y a  $\eta_3$ . Ahora, con  $\eta_3 = \eta_1$ , se ha acoplado la impedancia de entrada y, por lo tanto, no existe onda reflejada neta. El método de seleccionar el grosor de la región 2 se conoce como *acoplamiento de media onda*. Dentro de sus aplicaciones se incluyen, por ejemplo, los contenedores de antenas en aviones, también conocidos como *radomos*, los cuales forman parte del fuselaje. La antena dentro de la nave puede transmitir y recibir a través de esta capa, que puede diseñarse con una forma tal que permita tener buenas características aerodinámicas. Nótese que la condición de acoplamiento de media onda ya no se aplica, en virtud de que hay una desviación con respecto a la longitud de onda que la satisface. Cuando esto se hace, la reflectividad del dispositivo aumenta (al aumentar la desviación con respecto a la longitud de onda), por lo que actúa como un filtro pasa-bandas.

A menudo es conveniente expresar la constante dieléctrica del medio a través del *índice de refracción* (o sólo índice),  $n$ , definido como,

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (38)$$

La caracterización de materiales por sus índices de refracción se lleva a cabo, principalmente, a frecuencias ópticas (del orden de  $10^{14}$  Hz), mientras que a frecuencias mucho más bajas, por tradición, se especifica una constante dieléctrica. Puesto que  $\epsilon_r$  es compleja en un medio con pérdidas, el índice también será complejo. Más que complicar la situación de esta forma, se restringirá el uso del índice de refracción a casos que involucren medios sin pérdidas que tengan un  $\epsilon_r'' = 0$ , y un  $\mu_r = 1$ . En condiciones sin pérdidas se puede escribir la constante de fase de la onda plana, así como la impedancia intrínseca del material en términos del índice, por medio de,

$$\beta = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sqrt{\epsilon_r} = \frac{n\omega}{c} \quad (39)$$

y

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{\eta_0}{n} \quad (40)$$

Por último, la velocidad de fase y la longitud de onda del material de índice  $n$  son,

$$v_p = \frac{c}{n} \quad (41)$$

y

$$\lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{\lambda_0}{n} \quad (42)$$

en donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre. Obviamente, es importante no confundir el índice  $n$  con la letra griega de similar apariencia  $\eta$  (impedancia intrínseca), la cual tiene un significado totalmente diferente.

Otra aplicación que típicamente se observa en óptica es el *interferómetro Fabry-Perot*. Éste, en su forma más simple, consiste en un solo bloque de vidrio u otro material transpa-



rente de índice  $n$ , cuyo grosor,  $l$ , se calcula para transmitir longitudes de onda que satisfagan la condición  $\lambda = \lambda_0/n = 2l/m$ .

A menudo se desea transmitir solamente una longitud de onda, no varias, como la ecuación (37) lo permite. Por lo tanto, se querrá asegurar que las longitudes de onda adyacentes que pasan a través del dispositivo estén separadas lo más lejos posible, con la finalidad de que sólo una se encuentre en el espectro de potencia de entrada. En términos de la longitud de onda medida en el material, esta separación está dada en general por

$$\lambda_{m-1} - \lambda_m = \Delta\lambda_f = \frac{2l}{m-1} - \frac{2l}{m} = \frac{2l}{m(m-1)} \doteq \frac{2l}{m^2}$$

Nótese que  $m$  es el número de medias longitudes de onda en la región 2, o  $m = 2l/\lambda = 2nl/\lambda_0$ , donde  $\lambda_0$  es la longitud de onda en el espacio libre deseada para la transmisión. Por lo tanto,

$$\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2l} \quad (43a)$$

En términos de la longitud de onda medida en el espacio libre, esto se convierte en,

$$\Delta\lambda_{f0} = n\Delta\lambda_f \doteq \frac{\lambda_0^2}{2nl} \quad (43b)$$

A  $\Delta\lambda_{f0}$  se le conoce como el *rango espectral libre* del interferómetro Fabry-Perot en términos de la separación de longitud de onda en el espacio libre. El interferómetro puede utilizarse como un filtro de banda angosta (para transmitir una determinada longitud de onda y un espectro angosto alrededor de esta longitud de onda) si el espectro que se filtrará es más angosto que el rango espectral libre.

#### EJEMPLO 13.4

Supóngase que se desea filtrar un espectro óptico de ancho total  $\Delta\lambda_{s0} = 50$  nm (medidos en el espacio libre), cuya longitud de onda central,  $\lambda_0$ , se encuentra en la parte roja del espectro visible a 600 nm, donde un nm (nanómetro) es  $10^{-9}$  m. Se utilizará un filtro Fabry-Perot, consistente en una placa de vidrio sin pérdidas, que tiene un índice de refracción  $n = 1.45$ . Se necesita encontrar el rango de grosor del vidrio requerido para que múltiples longitudes de onda no se transmitan.

**Solución.** Se requiere que el rango espectral libre sea mayor que el ancho espectral óptico, o  $\Delta\lambda_{f0} > \Delta\lambda_s$ . Utilizando (43b),

$$l < \frac{\lambda_0^2}{2n\Delta\lambda_{s0}}$$

Así que,

$$l < \frac{600^2}{2(1.45)(50)} = 2.5 \times 10^3 \text{ nm} = 2.5 \mu\text{m}$$

donde  $1 \mu\text{m}$  (micrómetro) =  $10^{-6}$  m. La fabricación de una placa de vidrio de este grosor o menor se considera como algo ridículo. En cambio, lo que a menudo se utiliza es un colchón de aire con un grosor de esa medida entre dos placas delgadas, cuyas superficies de los lados opuestos del colchón de aire tengan capas antirreflejantes. Ésta es de hecho una configuración más versátil, ya que la longitud de onda que se transmitirá (y el rango espectral libre) puede ajustarse modificando la separación entre las placas.

A continuación se quita la restricción  $\eta_1 = \eta_3$  y se busca una forma de producir una reflexión igual a cero. Regresando a la ecuación (36), supóngase que se hace  $\beta_2 l = (2m - 1)\pi/2$ , o un múltiplo impar de  $\pi/2$ . Esto significa que,

$$\frac{2\pi}{\lambda_2} l = (2m - 1) \frac{\pi}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \dots)$$

o

$$l = (2m - 1) \frac{\lambda_2}{4} \quad (44)$$

Este grosor es un múltiplo impar de un cuarto de longitud de onda medida en la región 2. En esta condición (36) se reduce a,

$$\eta_{\text{ent}} = \frac{\eta_2^2}{\eta_3} \quad (45)$$

Típicamente, la impedancia de la segunda región se selecciona para permitir el acoplamiento entre las impedancias dadas,  $\eta_1$  y  $\eta_3$ . El logro de la total transmisión requiere que  $\eta_{\text{ent}} = \eta_1$  para que la impedancia requerida en la segunda región sea,

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3} \quad (46)$$

Una vez que las condiciones dadas en (44) y (46) han sido satisfechas, se lleva a cabo el acoplamiento de *un cuarto de onda*. El diseño de capas antirreflejantes en los dispositivos ópticos se basa en este principio.

### EJEMPLO 13.5

Se desea diseñar una capa protectora para cubrir una superficie de vidrio con el dieléctrico apropiado y así ofrecer una transmisión eficiente del aire al vidrio a una longitud de onda de 570 nm en el espacio libre. El vidrio tiene un índice de refracción  $n_3 = 1.45$ . Determínese el índice de refracción requerido para la capa protectora y el grosor mínimo requerido.

**Solución.** Las impedancias conocidas son  $\eta_1 = 377 \, \Omega$  y  $\eta_3 = 377/1.45 = 260 \, \Omega$ . Utilizando (46) se tiene

$$\eta_2 = \sqrt{(377)(260)} = 313 \, \Omega$$

El índice de refracción de la región 2 será entonces

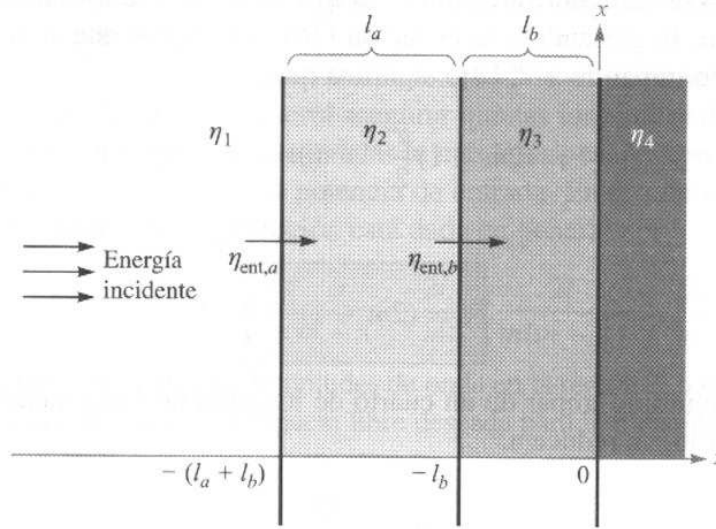
$$n_2 = \left( \frac{377}{313} \right) = 1.20$$

La longitud de onda de la región 2 será

$$\lambda_2 = \frac{570}{1.20} = 475 \, \text{nm}$$

El grosor mínimo de la capa dieléctrica es, entonces

$$l = \frac{\lambda_2}{4} = 119 \, \text{nm} = 0.119 \, \mu\text{m}$$



**Figura 13.5** Problema de tres interfases en el que la impedancia de entrada,  $\eta_{\text{ent},a}$  se convierte de nuevo en la interfase frontal para formar la impedancia de entrada,  $\eta_{\text{ent},b}$ .

El procedimiento que se sigue en esta sección para evaluar la reflexión de ondas involucra el cálculo de la impedancia efectiva en la primera interfase,  $\eta_{\text{ent}}$ , la cual se expresa en términos de las impedancias que están más allá de la superficie frontal. Este proceso de *transformación de impedancias* es más evidente cuando se consideran problemas que involucren a más de dos interfases.

Por ejemplo, considérese la situación de tres interfases que muestra la figura 13.5, donde una onda incide desde la izquierda hacia la región 1. Se desea determinar la fracción de la onda incidente que se refleja y propaga hacia atrás en la región 1, y la fracción de la potencia incidente que se transmite a la región 4. Hacerlo demanda encontrar la impedancia de entrada en la superficie frontal (la interfase entre las regiones 1 y 2). Se comienza transformando la impedancia de la región 4 para formar la impedancia de entrada en la frontera entre las regiones 2 y 3. Esto se muestra con  $\eta_{\text{ent},b}$  en la figura 13.5. Utilizando (36), se tiene

$$\eta_{\text{ent},b} = \eta_3 \frac{\eta_4 \cos \beta_3 l_b + j \eta_3 \sin \beta_3 l_b}{\eta_3 \cos \beta_3 l_b + j \eta_4 \sin \beta_3 l_b} \quad (47)$$

La situación se ha reducido en forma efectiva a un problema de dos interfases en el que  $\eta_{\text{ent},b}$  es la impedancia de todo lo que está más allá de la segunda interfase. La impedancia de entrada en la interfase frontal,  $\eta_{\text{ent},a}$  se encuentra ahora transformando  $\eta_{\text{ent},b}$  de la forma siguiente:

$$\eta_{\text{ent},a} = \eta_2 \frac{\eta_{\text{ent},b} \cos \beta_2 l_a + j \eta_2 \sin \beta_2 l_a}{\eta_2 \cos \beta_2 l_a + j \eta_{\text{ent},b} \sin \beta_2 l_a} \quad (48)$$

La fracción de la potencia reflejada ahora es  $|\Gamma|^2$ , donde,

$$\Gamma = \frac{\eta_{\text{ent},a} - \eta_1}{\eta_{\text{ent},a} + \eta_1}$$

La fracción de la potencia transmitida a la región 4 es, como antes,  $1 - |\Gamma|^2$ . El método de transformación de impedancias puede aplicarse de esta forma a cualquier número de interfases. Este proceso, aunque un poco tedioso, se realiza fácilmente en la computadora.

La motivación para el uso de capas múltiples con el fin de reducir la reflexión es que la estructura resultante es menos sensible a desviaciones con respecto a la longitud de onda de diseño, si las impedancias (o índices de refracción) se disponen de tal forma que dichos índices aumenten o disminuyan progresivamente de capa en capa. En caso de que se utilicen múltiples capas como cubierta antirreflejante de las lentes de una cámara, por ejemplo, la capa sobre la superficie de las lentes debe tener un valor de impedancia muy cercano al del vidrio. A las capas restantes se les colocan valores de impedancia progresivamente mayores. Con un gran número de capas fabricadas de esta forma la situación comienza a aproximarse (sin embargo, nunca llega a ser igual) al caso ideal, en el que la impedancia de la capa más exterior se acopla con la impedancia del aire, mientras que las impedancias de las capas más profundas decrecen de manera progresiva hasta alcanzar el valor de la impedancia de la superficie del vidrio. Ante esta impedancia que varía progresivamente, no existe superficie con cual se refleje la luz, por lo que la luz de cualquier longitud de onda se transmite totalmente. Las cubiertas multicapa que se diseñan de esta forma producen excelentes características de transmisión de banda ancha.

El método de transformación de impedancias para el manejo de interfases múltiples se aplica no sólo en las fronteras de ondas planas, sino que también en líneas de transmisión cargadas de longitud finita y en líneas de transmisión en cascada. Se encontrarán problemas de este tipo en el capítulo 14, los cuales serán resueltos utilizando exactamente las mismas matemáticas.

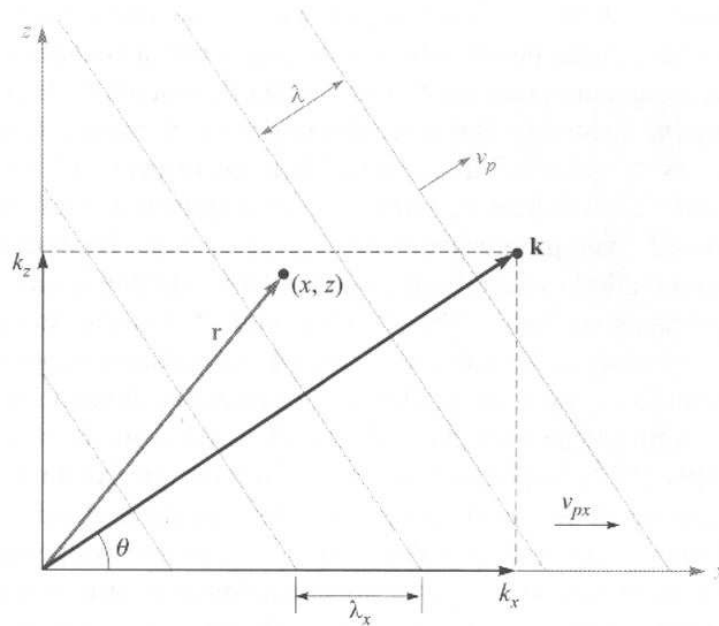
**D13.3** Una onda plana uniforme en el aire incide perpendicularmente sobre una placa hecha con material dieléctrico de grosor  $\lambda_2/4$  e impedancia intrínseca  $\eta_2 = 260 \Omega$ . Determínese la magnitud y fase del coeficiente de reflexión.

**Respuesta:** 0.356;  $180^\circ$

## 13.4 Propagación de ondas planas en direcciones generales

En esta sección se aprenderá cómo describir matemáticamente las ondas planas uniformes que se propagan en cualquier dirección. La motivación para hacer esto es la necesidad de abordar el problema de las ondas que inciden en fronteras que no son perpendiculares a la dirección de propagación. Dichos problemas de *incidencia oblicua* ocurren muy a menudo, por lo que la incidencia perpendicular es un caso especial. Atacar dichos problemas requiere (como siempre) el establecimiento de un sistema de coordenadas apropiado. Con la frontera ubicada sobre el plano  $x, y$ , por ejemplo, la onda incidente se propagará en una dirección que podría involucrar a los tres ejes coordenados, mientras que en la incidencia perpendicular sólo era importante la propagación a lo largo de  $z$ . Es necesario un formalismo matemático que permita la propagación en todas las direcciones.

Considérese una onda que se propaga en un medio sin pérdidas, con una constante de propagación  $\beta = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ . Por simplicidad, el caso se considera de dos dimensiones, donde la onda viaja en una determinada dirección entre los ejes  $x$  y  $z$ . El primer paso es considerar la constante de propagación como un *vector*,  $\mathbf{k}$ , el cual se indica en la figura 13.6.



**Figura 13.6** Representación de una onda plana uniforme con vector de onda  $\mathbf{k}$  con un ángulo  $\theta$  con respecto al eje  $x$ . La fase en el punto  $(x, z)$  está dado por  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Los planos de fase constante (mostrados con líneas perpendiculares a  $\mathbf{k}$ ) están espaciados una longitud de onda  $\lambda$  pero tienen un espaciamiento más grande cuando se miden a lo largo de los ejes  $x$  o  $z$ .

La dirección de  $\mathbf{k}$  es la dirección de propagación, que es la misma que la del vector de Poynting en nuestro caso.<sup>2</sup> La magnitud de  $\mathbf{k}$  es el corrimiento de fase por unidad de distancia *a lo largo de esa dirección*. Parte del proceso de caracterización de una onda es la especificación de su fase en cualquier punto en el espacio. Respecto de las ondas que se ha considerado que se propagan a lo largo del eje  $z$ , esto se logró utilizando el factor  $e^{\pm jkz}$  en forma fasorial. La especificación de la fase en este problema de dos dimensiones requiere emplear la naturaleza del vector  $\mathbf{k}$ , y se considera que la fase tiene una ubicación general  $(x, z)$  descrita por el vector de posición  $\mathbf{r}$ . La fase en ese lugar, referida al origen, está dada por la proyección de  $\mathbf{k}$  a lo largo de  $\mathbf{r}$  veces la magnitud de  $\mathbf{r}$ , o solamente  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ . Si el campo eléctrico tiene una magnitud  $E_0$ , la forma fasorial de la onda de la figura 13.6 se puede escribir como,

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (49)$$

El signo de menos en el exponente indica que la fase a lo largo de  $\mathbf{r}$  se mueve en el tiempo en la dirección en la que  $\mathbf{r}$  se incrementa. De nuevo, el flujo de la potencia de la onda en un medio isotrópico ocurre a lo largo de la dirección, cuyo corrimiento de fase por unidad de distancia es máximo, a lo largo de  $\mathbf{k}$ . El vector  $\mathbf{r}$  sirve como un medio para medir la fase en

<sup>2</sup> Se supone aquí que la onda está en un medio isotrópico, donde la permitividad y permeabilidad no cambia con la orientación del campo. En un medio anisotrópico (donde  $\epsilon$  o  $\mu$  dependen de la orientación del campo), las direcciones del vector de Poynting y  $\mathbf{k}$  pueden ser diferentes.

cualquier punto utilizando  $\mathbf{k}$ . Esta construcción puede extenderse fácilmente a tres dimensiones permitiendo que los vectores,  $\mathbf{k}$  y  $\mathbf{r}$ , tengan cada uno tres componentes.

En el caso de dos dimensiones de la figura 13.6 se puede expresar  $\mathbf{k}$  en términos de sus componentes  $x$  y  $z$ :

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_z \mathbf{a}_z$$

El vector de posición,  $\mathbf{r}$ , puede expresarse de manera similar como:

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z$$

por lo que

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_x x + k_z z$$

La ecuación (49) se transforma en

$$\mathbf{E}_s = \mathbf{E}_0 e^{-j(k_x x + k_z z)} \quad (50)$$

Mientras que la ecuación (49) expresaba la forma general de la onda, la ecuación (50) expresa la forma específica respecto de la situación. Dada una onda expresada por la ecuación (50), el ángulo de propagación desde el eje  $x$  se encuentra fácilmente a través de,

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{k_z}{k_x} \right)$$

La longitud de onda y la velocidad de fase dependen de la dirección que se esté considerando. En la dirección de  $\mathbf{k}$ , éstas serán,

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}}$$

y

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{(k_x^2 + k_z^2)^{1/2}}$$

Si, por ejemplo, se considera la dirección  $x$ , estas cantidades serán,

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{k_x}$$

y

$$v_{px} = \frac{\omega}{k_x}$$

Nótese que tanto  $\lambda_x$  como  $v_{px}$  tienen un valor mayor que sus contrapartes a lo largo de la dirección de  $\mathbf{k}$ . Este resultado, en principio sorprendente, se puede comprender mejor por medio de la geometría de la figura 13.6. El diagrama muestra una serie de frentes de onda (planos de fase constante) que interceptan  $\mathbf{k}$  en ángulos rectos. El corrimiento de fase entre frentes adyacentes está fijado a  $2\pi$  en la figura; esto corresponde a una separación espacial sobre la dirección de  $\mathbf{k}$  de una longitud de onda, como se muestra. Los frentes de fase interceptan al eje  $x$  y se observa que a lo largo del eje  $x$  la separación entre frentes es mayor que la que había a lo largo del eje  $\mathbf{k}$ .  $\lambda_x$  es el espaciamiento entre frentes a lo largo de  $x$  y está



indicado en la figura. La velocidad de fase a lo largo de  $x$  es la velocidad de los puntos de intersección entre los frentes de fase y el eje  $x$ . De nuevo, por geometría, se advierte que esta velocidad debe ser mayor que la velocidad a lo largo de  $\mathbf{k}$  y ésta, por supuesto, excederá a la de la luz en el medio. Sin embargo, lo anterior no constituye una violación a la relatividad especial, puesto que la energía de la onda fluye en la dirección de  $\mathbf{k}$  y no a lo largo de  $x$  o  $z$ . La frecuencia de la onda es  $f = \omega/2\pi$  y no varía con la dirección. Nótese, por ejemplo, que en las direcciones que se han considerado,

$$f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{v_{px}}{\lambda_x} = \frac{\omega}{2\pi}$$

### EJEMPLO 13.6

Considérese una onda plana uniforme de 50 MHz con una amplitud de campo eléctrico de 10 V/m. El medio no tiene pérdidas y tiene un valor de  $\epsilon_r = \epsilon'_r = 9.0$  y  $\mu_r = 1.0$ . La onda se propaga sobre el plano  $x, y$  a un ángulo de  $30^\circ$  con respecto al eje  $x$  y está polarizada linealmente a lo largo de  $z$ . Escribábase la expresión fasorial para el campo eléctrico.

**Solución.** La magnitud de la constante de propagación es

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c} = \frac{2\pi \times 50 \times 10^6(3)}{3 \times 10^8} = 3.2 \text{ m}^{-1}$$

El vector  $\mathbf{k}$  es ahora

$$\mathbf{k} = 3.2(\cos 30\mathbf{a}_x + \sin 30\mathbf{a}_y) = 2.8\mathbf{a}_x + 1.6\mathbf{a}_y \text{ m}^{-1}$$

Entonces

$$\mathbf{r} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y$$

Con el campo eléctrico dirigido a lo largo de  $z$ , la forma fasorial es,

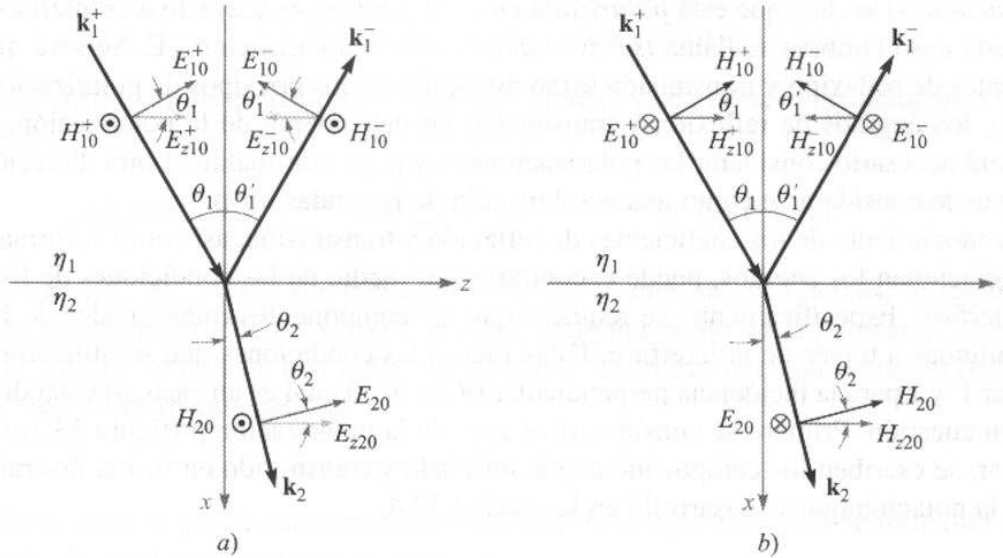
$$\mathbf{E}_s = E_0 e^{-j\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \mathbf{a}_z = 10 e^{-j(2.8x + 1.6y)} \mathbf{a}_z$$

**D13.4** Para el ejemplo 13.6, calcúlese  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $v_{px}$  y  $v_{py}$ .

**Respuesta:** 2.2 m; 3.9 m;  $1.1 \times 10^8$  m/s;  $2.0 \times 10^8$  m/s

## 13.5 Reflexión de ondas planas que inciden en ángulos oblicuos

Ahora se considera el problema de la reflexión de ondas que inciden sobre interfases planas, en las cuales la onda incidente se propaga con un determinado ángulo con respecto a la superficie. Los objetivos son (1) determinar la relación entre los ángulos incidente, reflejado y transmitido, y (2) deducir los coeficientes de reflexión y de transmisión como funciones del ángulo de incidencia y de la polarización de la onda. Asimismo, se mostrará que existen casos en los que pueden presentarse la reflexión total o la transmisión total, en la interfase entre los dos dieléctricos, si el ángulo de incidencia y la polarización se seleccionan adecuadamente.



**Figura 13.7** Geometrías de ondas planas incidentes a un ángulo  $\theta_1$  sobre una superficie entre dieléctricos que tienen impedancias intrínsecas  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . Los dos casos de polarización se muestran: a) polarización p (o TM), con  $\mathbf{E}$  sobre el plano de incidencia; b) polarización s (o TE), con  $\mathbf{E}$  perpendicular al plano de incidencia.

Esta situación se ilustra en la figura 13.7. Ahí, a la dirección de la onda incidente y la fase (que depende de la posición) las caracteriza un vector de onda  $\mathbf{k}_1^+$ . El ángulo de incidencia es el ángulo entre  $\mathbf{k}_1^+$  y una línea perpendicular a la superficie (el eje  $x$  en este caso). El ángulo de incidencia se muestra como  $\theta_1$ . La onda reflejada, caracterizada por el vector de onda  $\mathbf{k}_1^-$ , se propagará alejándose de la interfase con un ángulo  $\theta_1'$ . Por último, la onda transmitida, caracterizada por  $\mathbf{k}_2$ , se propagará en la segunda región con un ángulo  $\theta_2$ , como se muestra. Uno podría sospechar (a partir de experiencias anteriores) que los ángulos incidente y reflejado son iguales ( $\theta_1 = \theta_1'$ ), lo cual es correcto. Sin embargo, era necesario mostrar esto para que estuviera completo.

Los dos medios son dieléctricos sin pérdidas y los caracterizan impedancias intrínsecas  $\eta_1$  y  $\eta_2$ . Como se hizo antes, se supondrá que los materiales no son magnéticos y, por lo tanto, tienen una permeabilidad  $\mu_0$ . En consecuencia, los materiales se describen apropiadamente especificando sus constantes dieléctricas,  $\epsilon_{r1}$  y  $\epsilon_{r2}$ , o sus índices de refracción,  $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$  y  $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ .

La figura 13.7 muestra dos casos que difieren entre sí en la selección de la orientación del campo eléctrico. En la figura 13.7a el campo  $\mathbf{E}$  está polarizado sobre el plano de la página por lo tanto, con  $\mathbf{H}$  perpendicular a la página y apuntando hacia fuera. En esta figura el plano de la página también es el *plano de incidencia*, el cual se define con más precisión como el plano formado por el vector incidente  $\mathbf{k}$  y la perpendicular a la superficie. Con el vector  $\mathbf{E}$  sobre el plano de incidencia, se dice que la onda tiene *polarización paralela* o es *polarizada en p* ( $\mathbf{E}$  es paralelo al plano de incidencia). Nótese que mientras  $\mathbf{H}$  es perpendicular al plano de incidencia, éste es paralelo (o transversal) a la interfase. Como consecuencia, otro nombre para este tipo de polarización es *transversal magnético*, o polarización TM.

La figura 13.7b muestra la situación en que las direcciones del campo han sido giradas  $90^\circ$ . Ahora  $\mathbf{H}$  está sobre el plano de incidencia, mientras que  $\mathbf{E}$  es perpendicular al plano. Puesto que  $\mathbf{E}$  se utiliza para definir la polarización, la configuración se llama *polarización*

*perpendicular*, o se dice que está *polarizada en s*.<sup>3</sup>  $\mathbf{E}$  también es paralelo a la interfase, por lo que este caso también se llama *transversal eléctrico* o polarización TE. Se verá que los coeficientes de reflexión y transmisión serán diferentes en los dos tipos de polarización; sin embargo, los ángulos de reflexión y transmisión no dependerán de la polarización. Solamente será necesario considerar las polarizaciones s y p, ya que cualquier otra dirección del campo puede considerarse como una combinación de las ondas s y p.

El conocimiento de los coeficientes de reflexión y transmisión, así como la forma en la que se relacionan los ángulos, puede encontrarse por medio de las condiciones de frontera en la interfase. Específicamente, se requiere que las componentes transversales de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sean continuas a través de la interfase. Éstas fueron las condiciones que se utilizaron para encontrar  $\Gamma$  y  $\tau$  para la incidencia perpendicular ( $\theta_1 = 0$ ), el cual es un caso especial del problema en cuestión. Primero se considerará el caso de la polarización p (figura 13.7a). Para comenzar, se escriben los campos incidente, reflejado y transmitido en forma fasorial, utilizando la notación que se desarrolló en la sección 13.4:

$$\mathbf{E}_{s1}^+ = \mathbf{E}_{10}^+ e^{-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} \quad (51)$$

$$\mathbf{E}_{s1}^- = \mathbf{E}_{10}^- e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} \quad (52)$$

$$\mathbf{E}_{s2} = \mathbf{E}_{20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} \quad (53)$$

donde

$$\mathbf{k}_1^+ = k_1(\cos \theta_1 \mathbf{a}_x + \sin \theta_1 \mathbf{a}_z) \quad (54)$$

$$\mathbf{k}_1^- = k_1(-\cos \theta_1' \mathbf{a}_x + \sin \theta_1' \mathbf{a}_z) \quad (55)$$

$$\mathbf{k}_2 = k_2(\cos \theta_2 \mathbf{a}_x + \sin \theta_2 \mathbf{a}_z) \quad (56)$$

y donde

$$\mathbf{r} = x \mathbf{a}_x + z \mathbf{a}_z \quad (57)$$

Las magnitudes del vector de onda son  $k_1 = \omega\sqrt{\epsilon_{r1}}/c = n_1\omega/c$  y  $k_2 = \omega\sqrt{\epsilon_{r2}}/c = n_2\omega/c$ .

Ahora, para evaluar la condición de frontera que requiere el campo eléctrico tangencial continuo, es necesario encontrar las componentes de los campos eléctricos (componentes en  $z$ ) paralelos a la interfase. Proyectando todos los campos  $\mathbf{E}$  en la dirección  $z$  y utilizando las ecuaciones (51) a (57), se obtiene,

$$E_{zs1}^+ = E_{z10}^+ e^{-j\mathbf{k}_1^+ \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^+ \cos \theta_1 e^{-jk_1(x \cos \theta_1 + z \sin \theta_1)} \quad (58)$$

$$E_{zs1}^- = E_{z10}^- e^{-j\mathbf{k}_1^- \cdot \mathbf{r}} = E_{10}^- \cos \theta_1' e^{jk_1(x \cos \theta_1' - z \sin \theta_1')} \quad (59)$$

$$E_{zs2} = E_{z20} e^{-j\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = E_{20} \cos \theta_2 e^{-jk_2(x \cos \theta_2 + z \sin \theta_2)} \quad (60)$$

<sup>3</sup> La designación s es una abreviatura del alemán *senkrecht*, que significa *perpendicular*. La p en polarización p es una abreviatura de la palabra en alemán *parallel*, la cual significa *paralelo*.

Las condiciones de frontera para el campo eléctrico tangencial continuo son:

$$E_{zs1}^+ + E_{zs1}^- = E_{zs2} \quad (\text{at } x = 0)$$

Ahora se sustituyen las ecuaciones (58) a (60) en (61) y se evalúa el resultado en  $x = 0$  para obtener,

$$E_{10}^+ \cos \theta_1 e^{-jk_1 z \sin \theta_1} + E_{10}^- \cos \theta_1' e^{-jk_1 z \sin \theta_1'} = E_{20} \cos \theta_2 e^{-jk_2 z \sin \theta_2} \quad (61)$$

Nótese que  $E_{10}^+$ ,  $E_{10}^-$ , y  $E_{20}$  son constantes (independientes de  $z$ ). Además, se requiere que (61) sea válida para todos los valores de  $z$  (en cualquier punto de la interfase). Para que lo anterior suceda, se deduce que todos los términos fasoriales que aparezcan en (61) deben ser iguales. Específicamente,

$$k_1 z \sin \theta_1 = k_1 z \sin \theta_1' = k_2 z \sin \theta_2$$

A partir de esto, se puede ver inmediatamente que  $\theta_1' = \theta_1$ , o el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Asimismo, se ve que,

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (62)$$

A la ecuación (62) se le conoce como *ley de refracción de Snell*. Puesto que, en general,  $k = n\omega/c$ , se puede reescribir (62) en términos de los índices de refracción:

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (63)$$

La ecuación (63) es la forma de la ley de Snell que se utiliza con mayor facilidad para el caso de dieléctricos no magnéticos. La ecuación (62) es una forma más general que se aplicaría, por ejemplo, en casos que involucraran materiales con permeabilidades diferentes, así como permitividades distintas. En general, se tendría  $k_1 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r1}\epsilon_{r1}}$  y  $k_2 = (\omega/c)\sqrt{\mu_{r2}\epsilon_{r2}}$ .

Habiendo encontrado las relaciones entre los ángulos, a continuación se procede a cumplir con el segundo objetivo: determinar las relaciones entre las amplitudes,  $E_{10}^+$ ,  $E_{10}^-$  y  $E_{20}$ . Lograr esto requiere considerar la otra condición de frontera, que demanda continuidad tangencial de  $\mathbf{H}$  en  $x = 0$ . Todos los vectores de campo magnético para la onda polarizada en  $p$  están dirigidos hacia  $y$  negativa. En la frontera, las amplitudes de los campos están relacionadas por medio de

$$H_{10}^+ + H_{10}^- = H_{20} \quad (64)$$

Luego, cuando se usa el hecho de que  $\theta_1' = \theta_1$  y se invoca la ley de Snell, (61) se convierte en

$$E_{10}^+ \cos \theta_1 + E_{10}^- \cos \theta_1 = E_{20} \cos \theta_2 \quad (65)$$

Utilizando las impedancias intrínsecas del medio, se sabe, por ejemplo, que  $E_{10}^+/H_{20}^+ = \eta_1$  y  $E_{10}^+/H_{20}^+ = \eta_2$ . La ecuación (64) puede escribirse como sigue:

$$\frac{E_{10}^+ \cos \theta_1}{\eta_{1p}} - \frac{E_{10}^- \cos \theta_1}{\eta_{1p}} = \frac{E_{20} \cos \theta_2}{\eta_{2p}} \quad (66)$$

Nótese el signo de menos enfrente del segundo término de (66), lo que resulta del hecho de que  $E_{20}^- \cos \theta_1$  es negativo (de la ecuación 13.7a), mientras que  $H_{10}^-$  es positivo (de nuevo a

partir de la figura). Cuando se escribe la ecuación (66), las *impedancias efectivas*, válidas para la polarización p, se definen por medio de,

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos \theta_1 \quad (67)$$

y

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos \theta_2 \quad (68)$$

Utilizando esta representación, las ecuaciones (65) y (66) se encuentran ahora en una forma que permite despejar las relaciones  $E_{10}^-/E_{10}^+$  y  $E_{20}/E_{10}^+$ . Llevando a cabo procesos análogos a los que se utilizaron para resolver (7) y (8), se encuentran los coeficientes de reflexión y de transmisión:

$$\Gamma_p = \frac{E_{10}^-}{E_{10}^+} = \frac{\eta_{2p} - \eta_{1p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \quad (69)$$

$$\tau_p = \frac{E_{20}}{E_{10}^+} = \frac{2\eta_{2p}}{\eta_{2p} + \eta_{1p}} \left( \frac{\cos \theta_1}{\cos \theta_2} \right) \quad (70)$$

Puede llevarse a cabo un procedimiento similar para la polarización s como en la figura 13.7b. Los detalles se dejan como ejercicio; los resultados son

$$\Gamma_s = \frac{E_{y10}^-}{E_{y10}^+} = \frac{\eta_{2s} - \eta_{1s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (71)$$

$$\tau_s = \frac{E_{y20}}{E_{y10}^+} = \frac{2\eta_{2s}}{\eta_{2s} + \eta_{1s}} \quad (72)$$

donde las impedancias efectivas para la polarización s son

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec \theta_1 \quad (73)$$

y

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec \theta_2 \quad (74)$$

Las ecuaciones (67) a (74) son lo que se necesita para calcular la transmisión y reflexión de ondas para cualquier tipo de polarización, a cualquier ángulo de incidencia.



#### Ilustraciones

### EJEMPLO 13.7

Una onda plana uniforme en el aire incide sobre vidrio con un ángulo de  $30^\circ$  con respecto a la perpendicular. Determínese la fracción de la potencia incidente que se transmite y que se refleja para: a) polarización p y b) polarización s. El vidrio tiene un índice de refracción  $n_2 = 1.45$ .

**Solución.** En primer término, la ley de Snell se aplica para encontrar el ángulo de transmisión. Utilizando  $n_1 = 1$  para el aire, se utiliza (63) para encontrar,

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{\sin 30}{1.45} \right) = 20.2^\circ$$

Ahora, para la polarización p:

$$\eta_{1p} = \eta_1 \cos 30 = (377)(.866) = 326 \Omega$$

$$\eta_{2p} = \eta_2 \cos 20.2 = \frac{377}{1.45}(.938) = 244 \Omega$$

Después, usando la ecuación (69), se tiene

$$\Gamma_p = \frac{244 - 326}{244 + 326} = -0.144$$

La fracción de la potencia incidente que se refleja es

$$\frac{P_r}{P_{inc}} = |\Gamma_p|^2 = .021$$

Por lo tanto, la fracción de la potencia transmitida es

$$\frac{P_t}{P_{inc}} = 1 - |\Gamma_p|^2 = .979$$

Para polarización s, se tiene,

$$\eta_{1s} = \eta_1 \sec 30 = 377/.866 = 435 \Omega$$

$$\eta_{2s} = \eta_2 \sec 20.2 = \frac{377}{1.45(.938)} = 277 \Omega$$

Posteriormente, utilizando (71):

$$\Gamma_s = \frac{277 - 435}{277 + 435} = -.222$$

Por lo tanto, la fracción de potencia reflejada es

$$|\Gamma_s|^2 = .049$$

La fracción de la potencia incidente que se transmite es,

$$1 - |\Gamma_s|^2 = .951$$

En el ejemplo 13.7 se pudo advertir que los valores del coeficiente de reflexión para las dos polarizaciones eran negativos. El significado de un coeficiente de reflexión negativo es que la componente del campo eléctrico reflejado, que es paralelo a la interfase, tendrá una dirección opuesta a la componente del campo incidente cuando ambos se evalúen en la frontera.

Este efecto también se observa cuando el segundo medio es un conductor perfecto. En este caso, se sabe que el campo eléctrico dentro del conductor debe ser cero. En consecuencia,  $\eta_2 = E_{20}/H_{20} = 0$ , y los coeficientes de reflexión serán  $\Gamma_p = \Gamma_s = -1$ . La reflexión total se presenta, sin importar el ángulo de incidencia o la polarización.



### 13.6 Reflexión total y transmisión total de ondas incidentes oblicuas

Ahora que se tienen métodos disponibles para resolver problemas que involucren la transmisión y reflexión de ondas incidentes oblicuas, se pueden estudiar los casos espaciales de *reflexión total* y *transmisión total*. Se buscan combinaciones especiales de medios, ángulos de incidencia y polarizaciones que generen estas propiedades. Para comenzar, se identifica la condición necesaria para la reflexión total. Se desea la reflexión total de *potencia*, por lo que  $|\Gamma|^2 = \Gamma\Gamma^* = 1$ , donde  $\Gamma$  puede ser tanto  $\Gamma_p$  como  $\Gamma_s$ . El hecho de que esta condición incluya la posibilidad de un valor de  $\Gamma$  complejo permite cierta flexibilidad. Para el medio incidente, se puede señalar que  $\eta_{1p}$  y  $\eta_{1s}$  siempre serán reales y positivos. Por otro lado, cuando se considera el segundo medio,  $\eta_{2p}$  y  $\eta_{2s}$ , se involucran factores de  $\cos \theta_2$  o  $1/\cos \theta_2$ , donde

$$\cos \theta_2 = [1 - \sin^2 \theta_2]^{1/2} = \left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} \quad (75)$$

donde se ha utilizado la ley de Snell. Se observa que  $\cos \theta_2$ , y de aquí  $\eta_{2p}$  y  $\eta_{2s}$  se hacen imaginarios siempre que  $\sin \theta_1 > n_2/n_1$ . Considérese la polarización paralela, por ejemplo. En condiciones de un valor de  $\eta_{2p}$  imaginario, (69) se convierte en,

$$\Gamma_p = \frac{j|\eta_{2p}| - \eta_{1p}}{j|\eta_{2p}| + \eta_{1p}} = -\frac{\eta_{1p} - j|\eta_{2p}|}{\eta_{1p} + j|\eta_{2p}|} = -\frac{Z}{Z^*}$$

donde  $Z = \eta_{1p} - j|\eta_{2p}|$ . Por lo tanto, se puede ver que  $\Gamma_p \Gamma_p^* = 1$ , lo cual significa *reflexión total de potencia*, siempre que  $\eta_{2p}$  sea imaginaria. Lo mismo será válido siempre que  $\eta_{2p}$  sea cero, lo cual ocurre cuando  $\sin \theta_1 = n_2/n_1$ . Por lo tanto, se tiene una condición de reflexión interna total, la cual es

$$\sin \theta_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \quad (76)$$

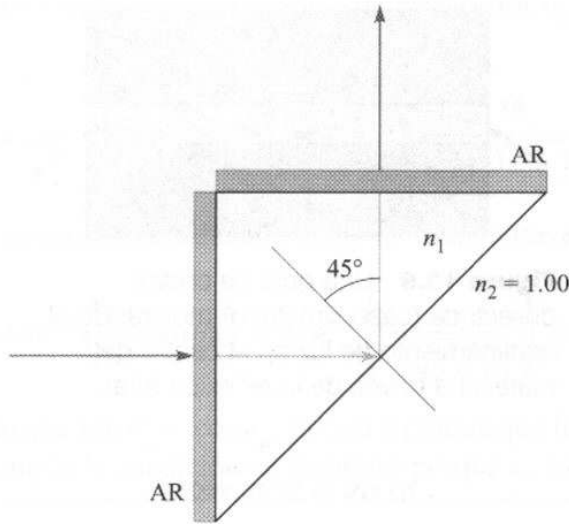
A partir de esta condición surge el *ángulo crítico* de reflexión total,  $\theta_c$ , definido como

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (77)$$

La condición de reflexión total puede, por lo tanto, escribirse más sucintamente como

$$\theta_1 \geq \theta_c \quad (\text{para reflexión total}) \quad (78)$$

Nótese que para que tengan sentido las ecuaciones (76) y (77), debe ser verdad que  $n_2 < n_1$ , o que la onda incidente esté en un medio con un índice de refracción mayor que el del medio ubicado más allá de la frontera. Por esta razón, la condición de reflexión total a menudo se denomina *reflexión interna total*; es común verlo (y aplicarlo) en dispositivos ópticos tales como prismas directores de rayos, donde la luz dentro de la estructura de vidrio se refleja totalmente en las interfases vidrio-aire.



**Figura 13.8** Prisma de haz guiado del ejemplo 13.8.

### EJEMPLO 13.8

Mediante un prisma se cambiará de dirección un rayo de luz  $90^\circ$ , como lo muestra la figura 13.8. La luz entra y sale del prisma a través de dos superficies antirreflejantes (con cubierta AR). La reflexión total ocurrirá sobre la superficie del fondo, donde el ángulo de incidencia es de  $45^\circ$  con respecto a la perpendicular. Determinése el índice de refracción mínimo que se requiere del material del prisma si la región que lo rodea es aire.

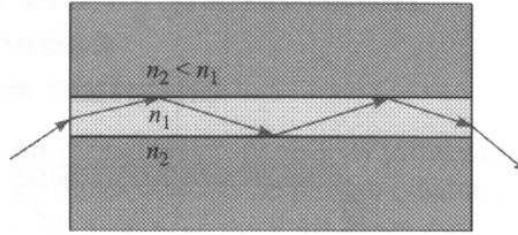
**Solución.** Considerando la superficie del fondo, el medio más allá de la interfase es aire con  $n_2 = 1.00$ . Puesto que  $\theta_1 = 45^\circ$ , se utiliza (76) para obtener,

$$n_1 \geq \frac{n_2}{\sin 45} = \sqrt{2} = 1.41$$

Puesto que el vidrio de silicio fundido tiene un índice de refracción  $n_g = 1.45$ , es un material adecuado para esta aplicación y, de hecho, se utiliza ampliamente.

Otra aplicación importante de la reflexión interna total es en *guías de onda ópticas*. Estas, en su forma más simple, se fabrican con tres capas de vidrio; la de en medio tiene un índice de refracción ligeramente mayor que las otras dos. La figura 13.9 muestra su estructura básica. La luz, propagándose de izquierda a derecha, se confina en la capa central por medio de la reflexión total en las dos interfases, como se muestra. Las guías de onda de fibra óptica se fabrican según este principio, en el cual, una región de vidrio cilíndrico de radio pequeño forma el núcleo y se encuentra rodeada coaxialmente por una cubierta de radio mayor, hecha de vidrio de menor índice de refracción. Los principios básicos del guiado de ondas aplicados en estructuras metálicas y dieléctricas se estudiarán en el capítulo 14.

A continuación se considera la posibilidad de la *transmisión total*. En este caso, el requisito es simplemente que  $\Gamma = 0$ . Se estudia esta posibilidad para las dos polarizaciones. Primero, se considera la polarización s. Si  $\Gamma_s = 0$ , entonces de (71) se requiere que  $\eta_{2s} = \eta_{1s}$ , o



**Figura 13.9** Una guía de ondas dieléctrica (caso simétrico) mostrando el confinamiento de luz en el centro del material a través de la reflexión total.

$$\eta_2 \sec \theta_2 = \eta_1 \sec \theta_1$$

Utilizando la ley de Snell para escribir  $\theta_2$  en términos de  $\theta_1$ , la ecuación anterior se transforma en,

$$\eta_2 \left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{-1/2} = \eta_1 [1 - \sin^2 \theta_1]^{-1/2}$$

No existe valor de  $\theta_1$  que satisfaga esta ecuación, por lo que se cambia a la polarización p. Utilizando (67), (68) y (69) con la ley de Snell se encuentra que la condición para  $\Gamma_p = 0$  es,

$$\eta_2 \left[ 1 - \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 \right]^{1/2} = \eta_1 [1 - \sin^2 \theta_1]^{1/2}$$

Esta ecuación tiene una solución, que es,

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_B = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \quad (79)$$

en donde se ha utilizado  $\eta_1 = \eta_0/n_1$  y  $\eta_2 = \eta_0/n_2$ . A este ángulo especial se le llama  $\theta_B$ , donde la transmisión total ocurre, el *ángulo de Brewster* o *ángulo de polarización*. Este último nombre proviene del hecho de que si la luz que tiene componentes de polarización en s y en p incidiera a un ángulo  $\theta_1 = \theta_B$ , la componente p sería transmitida por completo, dejando la luz parcialmente reflejada polarizada en s de manera total. A ángulos que sean ligeramente cercanos al ángulo de Brewster, la luz reflejada está aún polarizada en s, en forma predominante. La mayoría de la luz reflejada visible se origina en las superficies horizontales (como en la superficie de un océano), por lo que la luz tiene polarización horizontal, predominantemente. Los lentes oscuros Polaroid aprovechan este hecho para reducir el reflejo, ya que están diseñados para bloquear la transmisión de la luz polarizada horizontalmente, a la vez que dejan pasar la luz polarizada verticalmente.

### EJEMPLO 13.9

Luz en el medio aire incide sobre vidrio con el ángulo de Brewster. Determinéense los ángulos incidente y transmitido.

**Solución.** Puesto que el vidrio tiene un índice de refracción  $n_2 = 1.45$ , el ángulo incidente será,

$$\theta_1 = \theta_B = \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = \sin^{-1} \left( \frac{1.45}{\sqrt{1.45^2 + 1}} \right) = 55.4^\circ$$

El ángulo transmitido se encuentra mediante la ley de Snell a través de,

$$\theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_B \right) = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) = 34.6^\circ$$

Nótese en este ejercicio que  $\sin \theta_2 = \cos \theta_B$ , lo cual significa que la suma de los ángulos incidente y refractado cumple la condición de Brewster porque es siempre  $90^\circ$ .

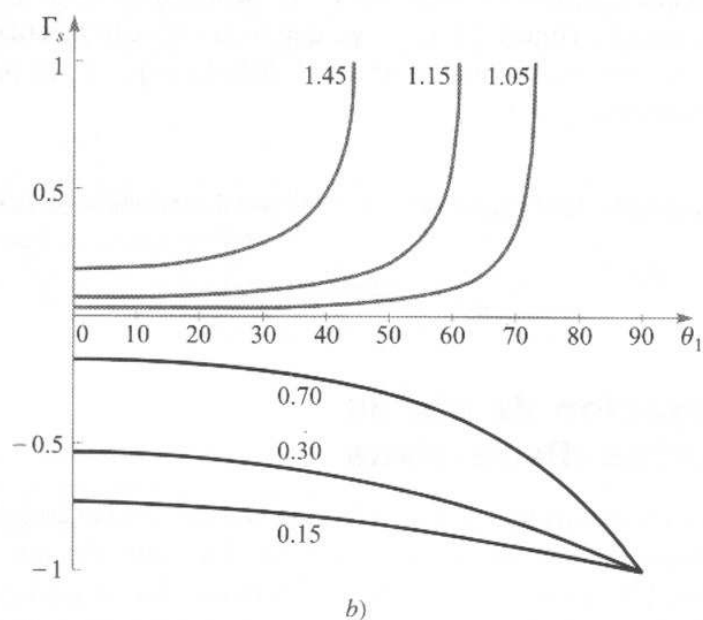
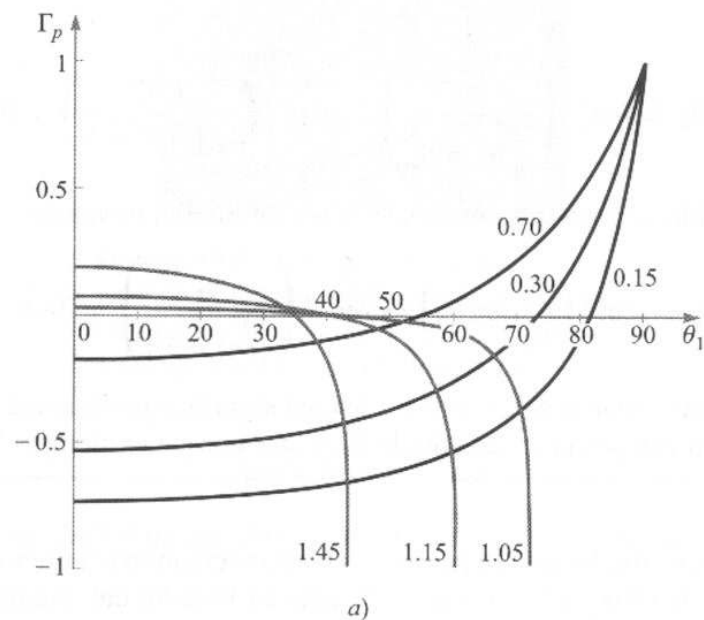
Muchos de los resultados que se han visto en esta sección se resumen en la figura 13.10, en la que  $\Gamma_p$  y  $\Gamma_s$ , de (69) y (71), están graficadas en función del ángulo incidente,  $\theta_1$ . Se muestran curvas de valores seleccionados de relación de índice de refracción,  $n_1/n_2$ . En todas las gráficas donde  $n_1/n_2 > 1$ ,  $\Gamma_s$  y  $\Gamma_p$  alcanzan valores de  $\pm 1$  en el ángulo crítico. A ángulos mayores los coeficientes de reflexión se hacen imaginarios (y no se muestran); sin embargo, conservan sus magnitudes unitarias. La presencia del ángulo de Brewster es evidente en las curvas para  $\Gamma_p$  (figura 13.10a), ya que todas las curvas cruzan el eje  $\theta_1$ . Este comportamiento no se observa en las funciones  $\Gamma_s$  debido a que  $\Gamma_s$  es positivo para todos los valores de  $\theta_1$  cuando  $n_1/n_2 > 1$ .

**D13.5** En el ejemplo 13.9 calcúlese el coeficiente de reflexión de luz polarizada en s.

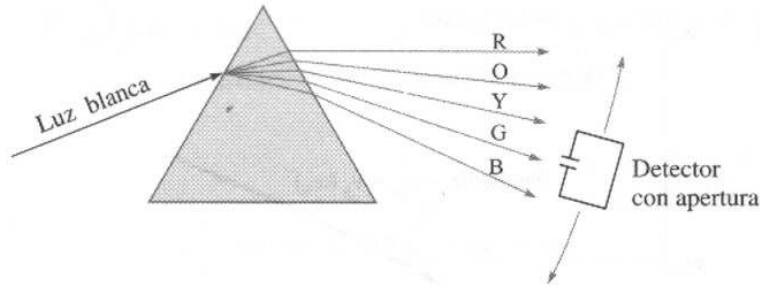
**Respuesta:**  $-0.355$

## 13.7 Propagación de ondas en medios dispersivos

En el capítulo 12 se estudiaron situaciones en las que la permitividad compleja del medio dependía de la frecuencia. Lo anterior es válido en todos los materiales por medio de muchos mecanismos posibles. Uno de ellos, ya mencionado, es que las cargas ligadas oscilantes en un material son de hecho osciladores armónicos que tienen frecuencias de resonancia asociadas con ellos (véase apéndice D). Cuando la frecuencia de una onda electromagnética entrante se encuentra en, o cerca de, la frecuencia de resonancia de una carga ligada, la onda inducirá oscilaciones fuertes; éstas a su vez minimizarán la energía de la onda en su forma original. Por lo tanto, la onda experimenta absorción, y lo hace en un grado mayor al que lo haría a una frecuencia que no estuviera en sintonía con la frecuencia de resonancia. Un efecto relacionado es que la parte real de la constante dieléctrica será más diferente a frecuencias cercanas a la de resonancia que a frecuencias lejanas a ésta. En pocas palabras, los efectos de la resonancia originan valores de  $\epsilon'$  y  $\epsilon''$ , que variarán continuamente con la frecuencia. Esto, a su vez, producirá que las constantes de atenuación y de fase dependan de la frecuencia de manera muy compleja, como lo expresan las ecuaciones (44) y (45) en el capítulo 12.



**Figura 13.10** a) Gráficas de  $\Gamma_p$  [ec. (69)] en función del ángulo de incidencia,  $\theta_1$ , como se muestra en la figura 13.7a. Se muestran las curvas para valores seleccionados de la relación de índices de refracción,  $n_1/n_2$ . Ambos medios no tienen pérdidas y tienen un  $\mu_r = 1$ . Por lo tanto,  $\eta_1 = \eta_0/n_1$  y  $\eta_2 = \eta_0/n_2$ . b) Gráficas de  $\Gamma_s$  [ec. (71)] en función del ángulo de incidencia,  $\theta_1$ , como se muestra en la figura 13.7b. Como en la figura 13.10a, los medios no tienen pérdidas y se muestran las curvas para valores de  $n_1/n_2$  seleccionados.



**Figura 13.11** La dispersión angular de un prisma puede medirse utilizando un dispositivo móvil, el cual mide la longitud de onda y la potencia. El dispositivo detecta la luz a través de una pequeña apertura, por lo tanto, mejora la resolución de la longitud de onda.

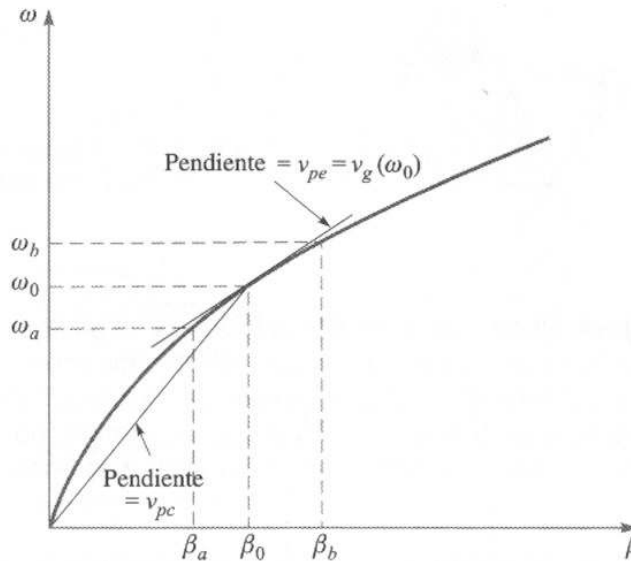
Esta sección se ocupa del efecto que tiene la constante dieléctrica variante con la frecuencia (o índice de refracción) sobre una onda a medida que se propaga en un medio sin pérdidas. Esta situación se presenta muy a menudo debido a que una variación significativa del índice de refracción se puede presentar a frecuencias lejanas a la de resonancia, donde las pérdidas por absorción son despreciables. Un ejemplo clásico al respecto es la separación de luz blanca en sus componentes de colores por medio de un prisma de vidrio. En este caso, la dependencia del índice de refracción con la frecuencia generará ángulos de refracción diferentes que correspondan a los distintos colores, de aquí su separación. Al efecto de separación de colores que produce el prisma se le conoce como *dispersión angular*, o más específicamente, *dispersión angular cromática*.

El término *dispersión* implica una *separación* de los componentes distinguibles de una onda. En el caso del prisma, las componentes son los diferentes colores que se han separado espacialmente. Un punto importante aquí es que el prisma ha dispersado la *potencia* espectral. Esta idea se puede ilustrar considerando lo que tomaría medir la diferencia entre los ángulos refractados, por ejemplo, entre la luz azul y la roja. Se necesitaría utilizar un detector de potencia con una apertura muy angosta, como el que se muestra en la figura 13.11. El detector se colocaría en los puntos correspondientes a la luz azul y roja del prisma, de tal forma que la apertura angosta del detector permitiera el paso de, básicamente, un solo color a la vez (o luz en un rango espectral muy angosto). Posteriormente, el detector podría medir la potencia en lo que se podría llamar un “paquete espectral”, o una rebanada muy angosta del espectro de frecuencia total. Mientras más pequeña sea la apertura, más angosto es el ancho espectral del paquete, y más precisa la medición.<sup>4</sup> Es importante que se piense acerca de la potencia de la onda como si estuviera subdividida en paquetes espectrales, ya que así se presentará prominentemente en la interpretación del tema principal de esta sección: la dispersión de la onda *en el tiempo*.

Ahora se considera un medio no magnético sin pérdidas en el que el índice de refracción varía con la frecuencia. La constante de fase de una onda plana uniforme en este medio tendrá la forma

<sup>4</sup> Para llevar a cabo este experimento será necesario medir la longitud de onda también. Para hacer esto es probable que el detector se encuentre localizado a la salida de un espectrómetro o monocromatógrafo, cuya ranura de entrada realice la función de la apertura limitada en ancho de banda.





**Figura 13.12** Diagrama  $\omega$ - $\beta$  para un material en el que el índice de refracción aumenta con la frecuencia. La pendiente de una línea tangente a la curva en  $\omega_0$  es la velocidad de grupo a esa frecuencia. La pendiente de una línea que une al origen con el punto sobre la curva en  $\omega_0$  es la velocidad de fase en  $\omega_0$ .

$$\beta(\omega) = k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon(\omega)} = n(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (80)$$

Si se hace que  $n(\omega)$  sea una función monótonicamente creciente con la frecuencia (como de manera normal lo es), una gráfica de  $\omega$  contra  $\beta$  se vería como la curva que muestra la figura 13.12. Dicha gráfica se conoce con el nombre de *diagrama  $\omega$ - $\beta$*  del medio. Se puede aprender mucho acerca de cómo se propagan las ondas en el material tomando en cuenta la forma de la curva  $\omega$ - $\beta$ .

Supóngase que se tienen dos ondas a dos frecuencias,  $\omega_a$  y  $\omega_b$ , que se están propagando simultáneamente en el material y cuyas amplitudes sean iguales. Las dos frecuencias están identificadas en la curva de la figura 13.12, junto con la frecuencia intermedia entre las dos,  $\omega_0$ . Las constantes de fase correspondientes,  $\beta_a$ ,  $\beta_b$  y  $\beta_0$  también están identificadas. Los campos eléctricos de las dos ondas están linealmente polarizados en la misma dirección (a lo largo del eje  $x$ , por ejemplo), mientras que ambas ondas se propagan en la dirección de  $z$  hacia delante. Por lo tanto, las ondas interferirán entre sí, lo que producirá una onda resultante cuya función de campo puede encontrarse simplemente sumando las campos  $\mathbf{E}$  de las dos ondas. Esta suma se lleva a cabo utilizando los campos complejos:

$$E_{c,\text{net}}(z, t) = E_0 [e^{-j\beta_a z} e^{j\omega_a t} + e^{-j\beta_b z} e^{j\omega_b t}]$$

Nótese que se deben utilizar las formas complejas completas (donde se conserva la dependencia con la frecuencia) en oposición con las formas fasoriales, puesto que las ondas están a diferentes frecuencias. A continuación, se factoriza el término  $e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t}$ :

$$\begin{aligned}
 E_{c,\text{net}}(z, t) &= E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} [e^{j\Delta\beta z} e^{-j\Delta\omega t} + e^{-j\Delta\beta z} e^{j\Delta\omega t}] \\
 &= 2E_0 e^{-j\beta_0 z} e^{j\omega_0 t} \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z)
 \end{aligned} \quad (81)$$

donde

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_a = \omega_b - \omega_0$$

y

$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_a = \beta_b - \beta_0$$

La expresión anterior de  $\Delta\beta$  es aproximadamente válida, siempre y cuando  $\Delta\omega$  sea pequeño. Esto puede verse en la figura 13.12, observando cómo la forma de la curva afecta  $\Delta\beta$ , dados los espaciamientos de frecuencia uniformes.

La forma instantánea real de (81) se encuentra por medio de,

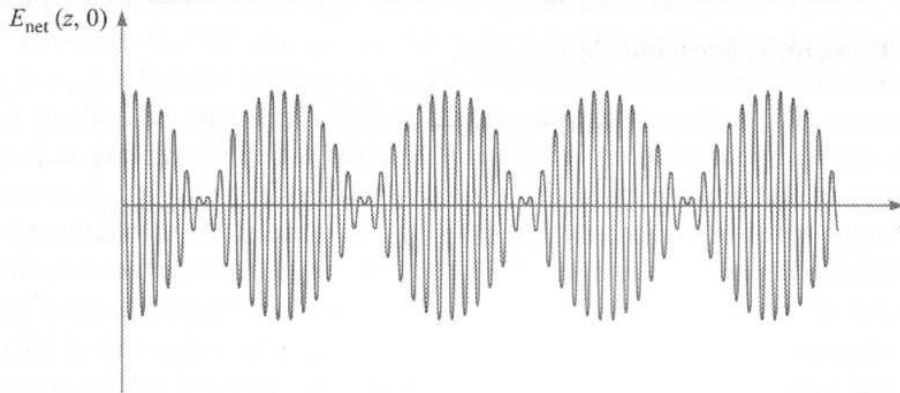
$$\mathcal{E}_{\text{net}}(z, t) = \text{Re}\{E_{c,\text{net}}\} = 2E_0 \cos(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos(\omega_0 t - \beta_0 z) \quad (82)$$

Si el valor de  $\Delta\omega$  es muy pequeño comparado con el de  $\omega_0$ , se reconoce (82) como una onda portadora a la frecuencia  $\omega_0$  que está modulada sinusoidalmente a la frecuencia  $\Delta\omega$ . Las dos ondas originales están, por lo tanto, “palpitando” al mismo tiempo para conformar una modulación lenta, como se escucharía cuando se tocara la misma nota en dos instrumentos musicales ligeramente fuera de sintonía. La onda resultante se muestra en la figura 13.13.

De interés para el lector son las velocidades de fase de la onda portadora y la envolvente de modulación. A partir de la ecuación (82) se puede escribir esto inmediatamente:

$$v_{pc} = \frac{\omega_0}{\beta_0} \quad (\text{velocidad portadora}) \quad (83)$$

$$v_{pe} = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} \quad (\text{velocidad envolvente}) \quad (84)$$



**Figura 13.13** Gráfica de la magnitud del campo eléctrico total como función de  $z$  (con  $t = 0$ ) de dos ondas que se propagan simultáneamente y que tienen frecuencias diferentes,  $\omega_a$  y  $\omega_b$ , conforme a la ecuación (81). Las oscilaciones rápidas están asociadas con la frecuencia de la portadora,  $\omega_0 = (\omega_a + \omega_b)/2$ . La modulación lenta está asociada con la envolvente o frecuencia de “latido”,  $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_a)/2$ .

En el diagrama  $\omega$ - $\beta$ , figura 13.12, se reconoce la velocidad de fase de la portadora como la pendiente de una línea recta que conecta al origen con el punto sobre la curva, cuyas coordenadas son  $\omega_0$  y  $\beta_0$ . Se reconoce la velocidad de la envolvente como una cantidad que se aproxima a la pendiente de la curva  $\omega$ - $\beta$  en un punto especificado por  $(\omega_0, \beta_0)$ . La velocidad de la envolvente en este caso es, por lo tanto, de alguna forma menor que la velocidad de la portadora. A medida que  $\Delta\omega$  se hace más pequeña, la velocidad de la envolvente es exactamente la pendiente de la curva en  $\omega_0$ . Por lo tanto, se puede establecer lo siguiente para el ejemplo:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta} = \left. \frac{d\omega}{d\beta} \right|_{\omega_0} = v_g(\omega_0) \quad (85)$$

La cantidad  $d\omega/d\beta$  se llama función de la *velocidad de grupo* para el material,  $v_g(\omega)$ . Cuando se evalúa una frecuencia específica,  $\omega_0$  representa la velocidad de un grupo de frecuencias dentro de un paquete espectral de grosor muy pequeño, centrado a la frecuencia  $\omega_0$ . Al establecer esto se ha ampliado el ejemplo de dos frecuencias para que incluya ondas que tengan un espectro de frecuencia continuo. Cada componente de frecuencia (o paquete) está asociada con una velocidad de grupo, a la cual se propaga la energía en ese paquete. Puesto que la pendiente de la curva  $\omega$ - $\beta$  cambia con la frecuencia, la velocidad de grupo estará, obviamente, en función de la frecuencia. La *dispersión de la velocidad de grupo* del medio es, en primer orden, la velocidad a la que cambia con frecuencia la pendiente de la curva  $\omega$ - $\beta$ . Este comportamiento es de una crítica importancia práctica en la propagación de ondas moduladas en un medio dispersivo, y en la comprensión del grado hasta el cual la envolvente de la modulación pueda degradarse con la distancia de propagación.

### EJEMPLO 13.10

Considérese un medio en el que el índice de refracción varíe linealmente con la frecuencia en un cierto rango:

$$n(\omega) = n_0 \frac{\omega}{\omega_0}$$

Determínese la velocidad de grupo y la velocidad de fase de una onda a una frecuencia  $\omega_0$ .

**Solución.** Primero, la constante de fase será,

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \frac{n_0 \omega^2}{\omega_0 c}$$

Ahora,

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{2n_0\omega}{\omega_0 c}$$

así que

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\omega_0 c}{2n_0\omega}$$

La velocidad de grupo en  $\omega_0$  es

$$v_g(\omega_0) = \frac{c}{2n_0}$$

La velocidad de fase en  $\omega_0$  será

$$v_p(\omega_0) = \frac{\omega}{\beta(\omega_0)} = \frac{c}{n_0}$$

### 13.8 Ensanchamiento de pulsos en medios dispersivos

Advertir cómo un medio dispersivo afecta una onda modulada requiere considerar la propagación de un pulso electromagnético. Los pulsos se utilizan en señales digitales, donde la presencia o ausencia de un pulso en un determinado espacio de tiempo corresponde a un “uno” o un “cero” digital. El efecto de un medio dispersivo sobre un pulso es ensancharlo en el tiempo. Con el fin de ver cómo sucede esto se considera el *espectro* del pulso, el cual se puede encontrar por medio de la transformada de Fourier del pulso en el dominio del tiempo. En particular, supóngase que la forma del pulso en el tiempo es gaussiana y que tiene un campo eléctrico dado en  $z = 0$  por

$$E(0, t) = E_0 e^{-\frac{1}{2}(t/T)^2} e^{j\omega_0 t} \quad (86)$$

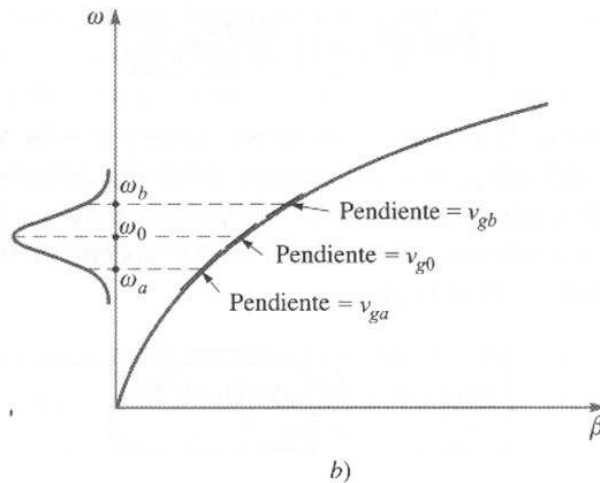
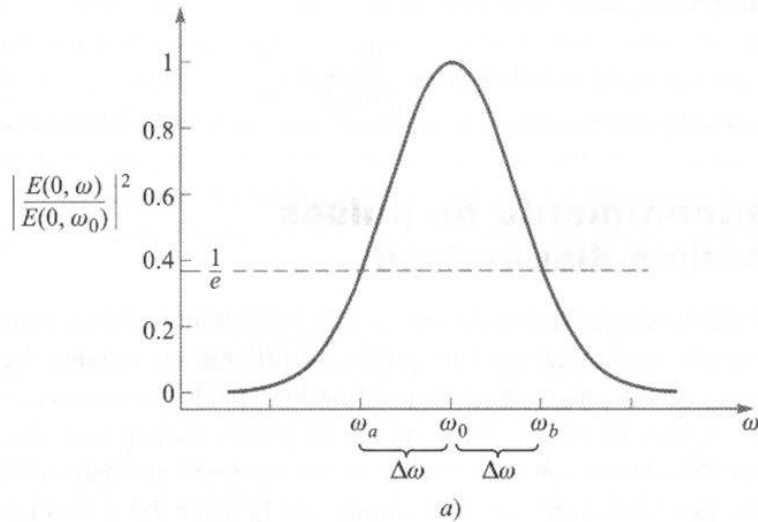
donde  $E_0$  es constante,  $\omega_0$  es la frecuencia de la portadora y  $T$  es el ancho-medio característico de la envolvente del pulso; éste es el tiempo en el que la *intensidad* del pulso, o la magnitud del vector de Poynting, disminuye en  $1/e$  su valor máximo (nótese que la intensidad es proporcional al cuadrado del campo eléctrico). El espectro de frecuencia del pulso es la transformada de Fourier de (86), la cual es

$$E(0, \omega) = \frac{E_0 T}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}T^2(\omega - \omega_0)^2} \quad (87)$$

Nótese de (87) que el desplazamiento de frecuencia de  $\omega_0$  al que la intensidad espectral (proporcional a  $|E(0, \omega)|^2$ ) disminuye a  $1/e$  de su máximo valor, es  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = 1/T$ .

La figura 13.14a muestra el espectro de la intensidad gaussiana del pulso, centrado en  $\omega_0$ , donde se indican las frecuencias correspondientes a las posiciones de intensidad espectral  $1/e$ ,  $\omega_a$  y  $\omega_b$ . La figura 13.14b muestra las mismas tres frecuencias señaladas en la curva  $\omega$ - $\beta$  del medio. Se encuentran dibujadas tres líneas tangentes a la curva a las tres frecuencias. Las pendientes de las líneas indican las velocidades de grupo en  $\omega_a$ ,  $\omega_b$  y  $\omega_0$ , indicadas como  $v_{ga}$ ,  $v_{gb}$  y  $v_{g0}$ . El ensanchamiento del pulso en el tiempo se puede considerar como el resultado de las diferencias en el tiempo de propagación de los paquetes de energía espectral que conforman el espectro del pulso. Puesto que la energía espectral del pulso es mayor en la frecuencia central,  $\omega_0$ , se puede usar ésta como un punto de referencia alrededor del cual se presentará un mayor ensanchamiento de energía. Por ejemplo, considérese la diferencia en los tiempos de llegada (retardos de grupo) entre las componentes de frecuencia,  $\omega_0$  y  $\omega_b$ , después de haberse propagado una distancia  $z$  en el medio:

$$\Delta\tau = z \left( \frac{1}{v_{gb}} - \frac{1}{v_{g0}} \right) = z \left( \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_b} - \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \right) \quad (88)$$



**Figura 13.14** a) Espectro de potencia normalizado de un pulso gaussiano, según ecuación (86). El espectro está centrado a una frecuencia de la portadora  $\omega_0$  y tiene ancho-medio  $1/e$ ,  $\Delta\omega$ . Las frecuencias  $\omega_a$  y  $\omega_b$  corresponden a  $1/e$  posiciones en el espectro. b) El espectro de la figura 13.14a como se muestra en el diagrama  $\omega$ - $\beta$  para el medio. Las tres frecuencias especificadas en la figura 13.14a están asociadas con tres diferentes pendientes sobre la curva, lo cual resulta en diferentes retardos de grupo de las componentes espectrales.

El punto fundamental es que el medio actúe como algo que podría llamarse un *prisma temporal*. En lugar de ensanchar espacialmente los paquetes de energía espectrales, los ensancha en el tiempo. En este proceso se forma una nueva envolvente de pulsos temporal, cuyo ancho está basado fundamentalmente en el ensanchamiento de los retardos de propagación de las diferentes componentes espectrales. Determinando la diferencia en retardo entre la componente espectral pico y la componente espectral de ancho-medio, se puede encontrar

una expresión para el nuevo ancho-medio *temporal*. Esto, por supuesto, supone que el ancho de pulso inicial es despreciable comparativamente, pero si no, se puede tomar en cuenta también, como se verá después. La evaluación de (88) requiere más información respecto de la curva  $\omega$ - $\beta$ . Si se supone que la curva está lisa y tiene una curvatura muy uniforme, se puede expresar  $\beta(\omega)$  como los tres primeros términos de una expansión de series de Taylor alrededor de la frecuencia portadora,  $\omega_0$ :

$$\beta(\omega) \doteq \beta(\omega_0) + (\omega - \omega_0)\beta_1 + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2\beta_2 \quad (89)$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_0 &= \beta(\omega_0) \\ \beta_1 &= \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \end{aligned} \quad (90)$$

y

$$\beta_2 = \left. \frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right|_{\omega_0} \quad (91)$$

Nótese que si la curva  $\omega$ - $\beta$  fuera una línea recta, entonces los primeros dos términos de (89) describirían de manera precisa  $\beta(\omega)$ . El tercer término de (89), que involucra a  $\beta_2$ , es el que describe la curvatura y, finalmente, la dispersión.

Notando que  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son constantes, se calcula la primera derivada de (89) con respecto a  $\omega$  para encontrar

$$\frac{d\beta}{d\omega} = \beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2 \quad (92)$$

Ahora se sustituye (92) en (88) para obtener

$$\Delta\tau = [\beta_1 + (\omega_b - \omega_0)\beta_2]z - [\beta_1 + (\omega_0 - \omega_0)\beta_2]z = \Delta\omega\beta_2z = \frac{\beta_2z}{T} \quad (93)$$

donde  $\Delta\omega = (\omega_b - \omega_0) = 1/T$ .  $\beta_2$ , como se define en (91), es el *parámetro de dispersión*. En general, sus unidades son tiempo<sup>2</sup>/distancia, que son ensanchamiento de pulso en el tiempo por unidad de ancho de banda espectral, por unidad de longitud. Por ejemplo, en las fibras ópticas, las unidades que más comúnmente se utilizan son picosegundos<sup>2</sup>/kilómetro (psec<sup>2</sup>/km).  $\beta_2$  se puede determinar cuando se conoce cómo varía  $\beta$  con la frecuencia, o también se puede medir.

Si el ancho del pulso inicial es muy pequeño en comparación con  $\Delta\tau$ , entonces el grosor del pulso ensanchado en  $z$  será simplemente  $\Delta\tau$ . Si el ancho del pulso inicial es comparable con  $\Delta\tau$ , entonces el ancho del pulso en  $z$  puede encontrarse por medio de la convo-



lución de la envolvente de pulsos gaussianos de anchura  $T$  con una envolvente gaussiana, cuyo grosor es  $\Delta\tau$ . Por lo tanto, en general, el ancho del pulso en  $z$  será,

$$T' = \sqrt{T^2 + (\Delta\tau)^2} \quad (94)$$

### EJEMPLO 13.11

Se sabe que un enlace por fibra óptica tiene una dispersión  $\beta_2 = 20 \text{ ps}^2/\text{km}$ . Un pulso de luz gaussiano a la entrada de la fibra tiene un ancho inicial de  $T = 10 \text{ ps}$ . Determinése el ancho del pulso en la salida de la fibra si el enlace tiene 15 km de longitud.

**Solución.** El ensanchamiento del pulso será

$$\Delta\tau = \frac{\beta_2 z}{T} = \frac{(20)(15)}{10} = 30 \text{ ps}$$

Así que el ancho del pulso de salida es,

$$T' = \sqrt{(10)^2 + (30)^2} = 32 \text{ ps}$$

Un producto secundario muy interesante del ensanchamiento de los pulsos a través de la dispersión cromática es que el pulso ensanchado es *silbado*. Esto significa que la frecuencia instantánea del pulso varía monótonicamente (aumenta o disminuye) con el tiempo sobre la envolvente del pulso. Otra vez, esto sólo es una manifestación del mecanismo de ensanchamiento en la cual las componentes espectrales a diferentes frecuencias se ensanchan en el tiempo a medida que se propagan a velocidades de grupo diferentes. El efecto de calcular el retardo de grupo,  $\tau_g$ , como función de la frecuencia, se puede cuantificar utilizando (92). Se obtiene:

$$\tau_g = \frac{z}{v_g} = z \frac{d\beta}{d\omega} = (\beta_1 + (\omega - \omega_0)\beta_2) z \quad (95)$$

Esta ecuación expresa que el retardo de grupo será una función lineal de la frecuencia, y que las frecuencias mayores llegarán en tiempos posteriores si  $\beta_2$  es positivo. El silbido es positivo si las frecuencias más bajas se adelantan en tiempo a las más altas [se requiere que  $\beta_2$  sea positivo en (95)]; el silbido es negativo si las frecuencias más altas se adelantan en tiempo ( $\beta_2$  es negativo). La figura 13.15 muestra el efecto del ensanchamiento e ilustra el fenómeno del silbido.

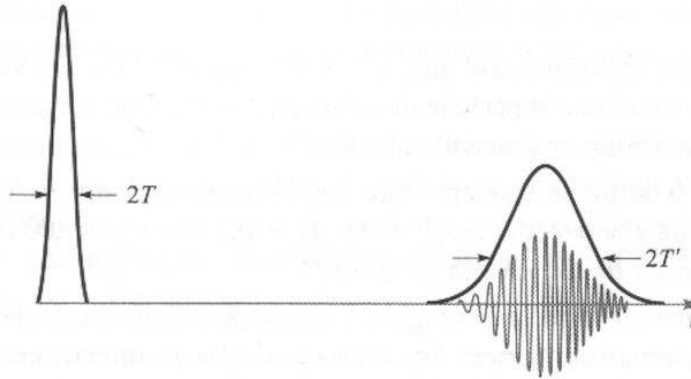


Animaciones

**D13.6** Para el enlace por fibra óptica del ejemplo 13.11 se inyecta un pulso de 20 ps en lugar de 10 ps. Determinése el ancho del pulso de salida.

**Respuesta:** 25 ps

Como punto final, nótese que el ancho de banda del pulso,  $\Delta\omega$ , se vio que era de  $1/T$ . Esto es válido siempre y cuando se calcule la transformada de Fourier de la *envolvente* del pulso, como se hizo con (86) para obtener (87). En este caso,  $E_0$  se consideró como constante, por lo que la única variación en el tiempo surgió de la onda portadora y de la envol-



**Figura 13.15** Intensidades de pulsos gaussianos en función del tiempo (curvas continuas) antes y después de propagarse a través de un medio disperso, como se muestra en el diagrama  $\omega$ - $\beta$  de la figura 13.14b. Las oscilaciones del campo eléctrico se muestran bajo el segundo trazo para demostrar el efecto silbido a medida que el pulso se ensancha. Nótese que la amplitud reducida del pulso ensanchado, el cual ocurre porque la energía del pulso (el área debajo de la envolvente de intensidad) es constante.

vente gaussiana. Dicho pulso, cuyo espectro de frecuencia se obtiene solamente de la envolvente del pulso, se conoce como *limitada por transformada*. Sin embargo, en general puede estar presente un ancho de banda adicional puesto que  $E_0$  puede variar con el tiempo por una razón u otra (como ruido de fase que pudiera estar presente en la portadora). En estos casos el ensanchamiento de pulsos se encuentra a partir de la expresión más genérica,

$$\Delta\tau = \Delta\omega\beta_2 z \quad (96)$$

donde  $\Delta\omega$  es el ancho de banda espectral neto que surge de todas las fuentes. Es claro que se prefieren los pulsos de transformada limitada con el fin de minimizar el ensanchamiento, ya que éstos tendrán un ancho espectral menor para un ancho de pulso determinado.

## Lecturas complementarias

1. DuBroff, R. E., S. V. Marshall y G. G. Skitek, *Electromagnetic Concepts and Applications*, 4a. ed., Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1996. El capítulo 9 de este texto aborda los conceptos presentados aquí, con ejemplos y aplicaciones adicionales.
2. Iskander, M. F., *Electromagnetic Fields and Waves*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1992. El tratamiento de las interfases múltiples del capítulo 5 de este texto es particularmente bueno.
3. Harrington, R. F., *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*, Nueva York, McGraw-Hill, 1961. Este texto avanzado ofrece un panorama muy bueno de los conceptos generales sobre la reflexión de ondas en el capítulo 2.
4. Marcuse, D., *Light Transmission Optics*. Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1982. Este texto de nivel intermedio proporciona una cobertura detallada de las guías de onda ópticas y la propagación de pulsos en medios dispersivos.



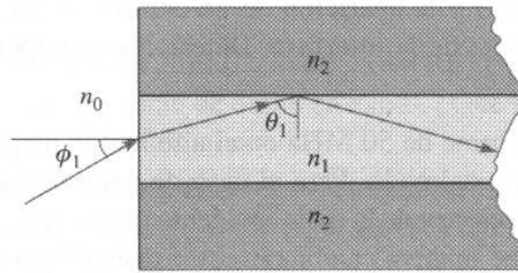
## Exámenes

## Problemas

- 13.1** Una onda plana uniforme en el aire,  $E_{x1}^+ = E_{x10}^+ \cos(10^{10} t - \beta z)$  V/m, incide perpendicularmente sobre una superficie de cobre en  $z = 0$ . ¿Qué porcentaje de la densidad de potencia incidente se transmite al cobre?
- 13.2** El plano  $z = 0$  define la frontera entre dos dieléctricos. Para  $z < 0$ ,  $\epsilon_{r1} = 5$ ,  $\epsilon_{r1}'' = 0$  y  $\mu_1 = \mu_0$ . Para  $z > 0$ ,  $\epsilon_{r2} = 3$ ,  $\epsilon_{r2}'' = 0$  y  $\mu_2 = \mu_0$ . Sea  $E_{x1}^+ = 200 \cos(\omega t - 15z)$  V/m y encuentre a)  $\omega$ ; b)  $\langle S_1^+ \rangle$ ; c)  $\langle S_1^- \rangle$ ; d)  $\langle S_2^+ \rangle$ .
- 13.3** Una onda plana uniforme en la región 1 incide perpendicularmente sobre la frontera plana que separa a las regiones 1 y 2. Si  $\epsilon_1'' = \epsilon_2'' = 0$ , mientras que  $\epsilon_{r1}' = \mu_{r1}^3$  y  $\epsilon_{r2}' = \mu_{r2}^3$ , encuentre la relación  $\epsilon_{r2}'/\epsilon_{r1}'$  si el 20% de la energía de la onda incidente se refleja en la frontera. Existen dos posibles respuestas.
- 13.4** Una onda plana uniforme de 10 MHz tiene una densidad de potencia promedio inicial de 5 W/m<sup>2</sup> e incide perpendicularmente en el espacio libre sobre la superficie de un material con pérdidas en el que  $\epsilon_2''/\epsilon_2' = 0.05$ ,  $\epsilon_{r2}' = 5$  y  $\mu_2 = \mu_0$ . Calcule la distancia en el medio con pérdidas a la que la densidad de potencia de la onda transmitida disminuye 10 dB de la densidad inicial de 5 W/m<sup>2</sup>.
- 13.5** La región  $z < 0$  se caracteriza por  $\epsilon_r' = \mu_r = 1$  y  $\epsilon_r'' = 0$ . El campo total  $\mathbf{E}$  aquí está dado como la suma de dos ondas planas uniformes,  $\mathbf{E}_s = 150 e^{-j10z} \mathbf{a}_x + (50 \angle 20^\circ) e^{j10z} \mathbf{a}_x$  V/m. a) ¿Cuál es la frecuencia de operación? b) Especifique la impedancia intrínseca de la región  $z > 0$  que proporcionaría la onda reflejada apropiada. c) ¿A qué valor de  $z$ ,  $-10 \text{ cm} < z < 0$ , tiene máxima amplitud la intensidad del campo eléctrico total?
- 13.6** La región 1,  $z < 0$ , y la región 2,  $z > 0$ , están descritas por los parámetros siguientes:  $\epsilon_1' = 100 \text{ pF/m}$ ,  $\mu_1 = 25 \text{ } \mu\text{H/m}$ ,  $\epsilon_1'' = 0$ ,  $\epsilon_2' = 200 \text{ pF/m}$ ,  $\mu_2 = 50 \text{ } \mu\text{H/m}$  y  $\epsilon_2''/\epsilon_2' = 0.5$ . Si  $\mathbf{E}_1^+ = 5e^{-\alpha_1 z} \cos(4 \times 10^9 t - \beta_1 z) \mathbf{a}_x$  V/m, encuentre: a)  $\alpha_1$ ; b)  $\beta_1$ ; c)  $\langle S_1^+ \rangle$ ; d)  $\langle S_1^- \rangle$ ; e)  $\langle S_2^+ \rangle$ .
- 13.7** Las regiones semiinfinitas  $z < 0$  y  $z > 1 \text{ m}$  están en el espacio libre. Para  $0 < z < 1 \text{ m}$ ,  $\epsilon_r' = 4$ ,  $\mu_r = 1$  y  $\epsilon_r'' = 0$ . Una onda plana uniforme con  $\omega = 4 \times 10^8 \text{ rad/s}$  está viajando en la dirección de  $\mathbf{a}_z$  hacia la interfase en  $z = 0$ . a) Encuentre la razón de onda estacionaria en cada una de las tres regiones; b) Encuentre la ubicación del  $|\mathbf{E}|$  máximo para  $z < 0$  que está más cerca de  $z = 0$ .
- 13.8** Una onda empieza en el punto  $a$ , se propaga 100 m a través de un dieléctrico con pérdidas para el que  $\alpha = 0.5 \text{ Np/m}$ , se refleja como resultado de una incidencia perpendicular en una frontera en la que  $\Gamma = 0.3 + j0.4$ , y después regresa al punto  $a$ . Calcule la relación de la potencia final y la potencia incidente después de este viaje redondo.
- 13.9** La región 1,  $z < 0$ , y la región 2,  $z > 0$ , son perfectos dieléctricos ( $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon'' = 0$ ). Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección de  $\mathbf{a}_z$  tiene una frecuencia en radianes de  $3 \times 10^{10} \text{ rad/s}$ . Sus longitudes de onda en las dos regiones son  $\lambda_1 = 5 \text{ cm}$  y  $\lambda_2 = 3 \text{ cm}$ . ¿Qué porcentaje de la energía incidente sobre la frontera es: a) reflejada; b) transmitida; c) ¿cuál es la razón de onda estacionaria de la región 1?
- 13.10** En la figura 13.1, sea la región 2 el espacio libre mientras que  $\mu_{r1} = 1$ ,  $\epsilon_{r1}'' = 0$  y  $\epsilon_{r1}'$  es desconocido. Encuentre  $\epsilon_{r1}'$  si: a) la amplitud de  $\mathbf{E}_1^-$  es la mitad de la de  $\mathbf{E}_1^+$ ; b)  $\langle S_1^- \rangle$  es la mitad de  $\langle S_1^+ \rangle$ ; c)  $|\mathbf{E}_1|_{\min}$  es la mitad de  $|\mathbf{E}_1|_{\max}$ .
- 13.11** Una onda plana uniforme de 150 MHz en el aire incide perpendicularmente sobre un material cuya impedancia intrínseca se desconoce. Las mediciones dan una razón de

onda estacionaria de 3 y la aparición de un campo eléctrico mínimo de 0.3 longitudes de onda enfrente de la interfase. Determine la impedancia del material desconocido.

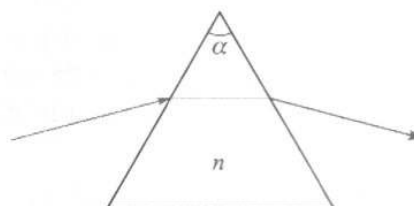
- 13.12** Una onda plana uniforme de 50 MHz en el aire incide perpendicularmente en la superficie de un océano calmado. Para el caso de agua salada,  $\sigma = 4 \text{ S/m}$  y  $\epsilon'_r = 78$ .  
*a)* Determine las fracciones de la onda incidente que se reflejan y transmiten. *b)* Cualitativamente, ¿de qué manera cambiarán estas respuestas (si es que lo hacen) a medida que aumente la frecuencia?
- 13.13** Una onda plana en el aire polarizada circularmente hacia la derecha incide perpendicularmente en la superficie en una placa semiinfinita de plexiglás ( $\epsilon'_r = 3.45$ ,  $\epsilon''_r = 0$ ). Calcule las fracciones de la potencia incidente que se reflejan y transmiten. Asimismo, describa las polarizaciones de las ondas reflejadas y transmitidas.
- 13.14** Una onda plana polarizada circularmente a la izquierda incide perpendicularmente en la superficie de un conductor perfecto. *a)* Construya la superposición de las ondas incidentes y reflejadas en forma fasorial. *b)* Determine la forma instantánea real del resultado de la parte *a)*. *c)* Describa la onda que se forma.
- 13.15** Considere las regiones en las que  $\epsilon'' = 0$ : región 1,  $z < 0$ ,  $\mu_1 = 4 \mu\text{H/m}$  y  $\epsilon'_1 = 10 \text{ pF/m}$ ; región 2,  $0 < z < 6 \text{ cm}$ ,  $\mu_2 = 2 \mu\text{H/m}$ ,  $\epsilon'_2 = 25 \text{ pF/m}$ ; región 3,  $z > 6 \text{ cm}$ ,  $\mu_3 = \mu_1$ , y  $\epsilon'_3 = \epsilon'_1$ . *a)* ¿Cuál es la frecuencia más baja en la que una onda plana uniforme incidente de la región 1 en la frontera en  $z = 0$  no se reflejará? *b)* Si  $f = 50 \text{ MHz}$ , ¿cuál será la razón de onda estacionaria de la región 1?
- 13.16** Una onda plana uniforme en el aire incide perpendicularmente en una placa de dieléctrico sin pérdidas de grosor igual a  $\lambda/8$  e impedancia intrínseca  $\eta = 260 \Omega$ . Determine la razón de onda estacionaria enfrente de la placa. Asimismo, encuentre la fracción de la potencia incidente que se transmite al otro lado de la placa.
- 13.17** Repita el problema 13.16 para los casos en los que la frecuencia es *a)* el doble y *b)* el cuádruple. Suponga que la impedancia de la placa no depende de la frecuencia.
- 13.18** Una onda plana uniforme incide perpendicularmente sobre una placa de vidrio ( $n = 1.45$ ) cuya superficie de atrás está en contacto con un conductor perfecto. Determine el corrimiento de fase reflejado en la superficie frontal del vidrio si el grosor del vidrio es: *a)*  $\lambda/2$ ; *b)*  $\lambda/4$ ; *c)*  $\lambda/8$ .
- 13.19** Se le proporcionan cuatro placas de material dieléctrico sin pérdidas, todas con la misma impedancia intrínseca,  $\eta$ , que se sabe que es diferente de la del espacio libre. El grosor de cada placa es de  $\lambda/4$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda medida en el material de las placas. Éstas se colocarán paralelas entre sí y el conjunto se encuentra en la misma trayectoria de una onda plana uniforme, que incide perpendicularmente. Las placas se colocarán de tal forma que los espacios de aire entre ellas tienen un grosor de cero, un cuarto y media longitud de onda. Especificar el arreglo de las placas y los espacios entre ellas de tal forma que *a)* la onda sea transmitida totalmente a través del arreglo y *b)* el arreglo presente la máxima reflectividad a la onda incidente. Pueden existir varias respuestas.
- 13.20** La onda plana de 50 MHz del problema 13.12 incide sobre la superficie del océano con un ángulo con respecto a la perpendicular de  $60^\circ$ . Determine las fracciones



**Figura 13.16** Véanse problemas 13.22 y 13.23.

de la potencia incidente que se reflejan y transmiten para a) polarización s y b) polarización p.

- 13.21** Una onda plana en el aire polarizada circularmente a la derecha incide con un ángulo de Brewster sobre una placa de plexiglás semiinfinita ( $\epsilon'_r = 3.45$ ,  $\epsilon''_r = 0$ ). a) Determine las fracciones de la potencia incidente que se refleja y transmite. b) Describa las polarizaciones de las ondas reflejada y transmitida.
- 13.22** Una guía de onda dieléctrica se muestra en la figura 13.16 con los índices de refracción que se muestran. Luz incidente ingresa a la guía con un ángulo  $\phi$  con respecto a la superficie frontal, como se muestra. Una vez adentro, la luz se refleja totalmente en la interfase superior  $n_1 - n_2$ , donde  $n_1 > n_2$ . Todas las reflexiones subsecuentes de las fronteras superior e inferior también serán totales, por lo que la luz estará confinada en la guía. Expresé, en términos de  $n_1$  y  $n_2$ , el valor máximo de  $\phi$  tal que se presente confinamiento total, con  $n_0 = 1$ . La cantidad  $\sin \phi$  se conoce como la *apertura numérica* de la guía.
- 13.23** Supóngase que  $\phi$  en la figura 13.16 es el ángulo de Brewster y que  $\theta_1$  es el ángulo crítico. Encuentre  $n_0$  en términos de  $n_1$  y  $n_2$ .
- 13.24** Un *prisma de Brewster* está diseñado para dejar pasar luz con polarización p sin ninguna pérdida por reflexión. El prisma de la figura 13.17 está hecho de vidrio ( $n = 1.45$ ) y está en el aire. Considerando la trayectoria de luz mostrada, determine el ángulo superior  $\alpha$ .
- 13.25** En el prisma de Brewster de la figura 13.17 determine, para la polarización s de la luz, la fracción de la potencia incidente que se transmite a través del prisma.
- 13.26** Demuestre cómo un solo bloque de vidrio puede utilizarse para desplazar un rayo de luz con polarización p  $180^\circ$ , tomando en cuenta que (en principio), la luz no tiene pérdidas por reflexión. La luz incide desde el aire y el rayo que regresa (también en el aire) puede desplazarse hacia los lados del rayo incidente. Especifique todos los ángulos pertinentes y utilice  $n = 1.45$  para el vidrio. Existe más de un posible diseño.



**Figura 13.16** Véanse problemas 13.24 y 13.25.



- 13.27** Utilizando la ecuación (79) del capítulo 12 como punto de partida, determine la razón de las velocidades de grupo y fase de una onda electromagnética en un buen conductor. Suponga que la conductividad no varíe con la frecuencia.
- 13.28** En un pequeño rango de longitudes de onda, el índice de refracción de un cierto material varía aproximadamente en forma lineal con la longitud de onda en la forma  $n(\lambda) = n_a + n_b(\lambda - \lambda_a)$ , donde  $n_a$ ,  $n_b$  y  $\lambda_a$  son constantes y donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el espacio libre. a) Demuestre que  $d/d\omega = -(2\pi c/\omega^2)d/d\lambda$ . b) Utilizando  $\beta(\lambda) = 2\pi n/\lambda$ , determine el retardo de grupo dependiente (o no dependiente) de la longitud de onda por unidad de distancia. c) Determine  $\beta_2$  del resultado de la parte b). d) Comente las implicaciones de estos resultados, si es que hay, sobre el ensanchamiento de pulsos.
- 13.29** Un pulso  $T = 5$  ps limitado por transformada se propaga en un medio dispersivo para el que  $\beta_2 = 10$  ps<sup>2</sup>/km. ¿En qué distancia se ensanchará el pulso al doble de su ancho inicial?
- 13.30** Un pulso  $T = 20$  ps limitado por transformada se propaga a través de 10 km de un medio dispersivo para el que  $\beta_2 = 12$  ps<sup>2</sup>/km. El pulso, después, a través de un segundo medio de 10 km de longitud para el cual  $\beta_2 = -12$  ps<sup>2</sup>/km. Describa el pulso a la salida del segundo medio y dé una explicación física de lo que pasó.