REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION
****

CONCOURS NATIONAL DE MATHEMATIQUES

PROPOSE PAR L'ASSOCIATION TUNISIENNE DES SCIENCES MATHEMATIQUES
****

SESSION DE MAI 2001 <<>> DUREE : 4 HEURES

Exercice n°1

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax^2 \qquad \text{où } a \text{ est un réel donné on nul.}$$

Démontrer qu'il existe un point T de l'axe des ordonnées et une droite Δ parallèle à l'axe des abscisses tels que :
Pour tout point M de $\mathscr{C}$, MT = MH où H est le projeté orthogonal de M sur Δ.

Exercice n°2

On désigne par a, b, c les longueur respectives des côtés [BC], [CA], [AB] d'un triangle ABC et par A, B, C les mesures en radians des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ de ce triangle. Montrer que si

$a + b = \operatorname{tg}\frac{c}{2}[a \operatorname{tg} A + b \operatorname{tg} B]$ alors le triangle ABC est isocèle.

Exercice n°3

On désigne par I le centre du cercle inscrit d'un triangle ABC. La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit en D, soient E et F les projetés orthogonaux de I sur BD et DC respectivement.

1- Démontrer que DB = DC = DI.
2- On suppose que AD = 2(IE + IF).

Montrer alors que $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{6}$.

Exercice n° 4

On pose $t_n = (1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n$ où n est un entier positif ou nul.

1- Montrer que t_n est un nombre entier pour tout n.
2- Démontrer la relation :
$$t_{n+1} = 2(t_n + t_{n-1}) \text{ pour tout } n \geq 1$$
3- Démontrer que pour tout n
$$\frac{t_n}{2^{k_n}} \text{ est un entier, où } k_n = E\left(\frac{n+2}{2}\right).$$

On rappelle que pour tout réel x, E(x) est la partie entière de x, c'est à dire le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x.

4- Démontrer que pour tout n :
$$\frac{2^{n+1} + t_{2n+1}}{2^{n+2}} \text{ est un entier.}$$

Nota bene (On pourra pour les questions 3- et 4- raisonner par récurrence).